

## Úloha č. 4

## Měření momentu setrvačnosti z doby kmitu

### Úkoly měření:

1. Určete moment setrvačnosti vybraných těles, kruhové a obdélníkové desky.
2. Stanovení momentu setrvačnosti proveďte s využitím dvou rozdílných metod:
  - a) experimentálně z měření dob kmitů okolo jednotlivých os ležících mimo těžiště tělesa (*nepřímá metoda*).
  - b) výpočtem na základě znalosti hmotnosti a přesných rozměrů těles (*přímá metoda*).
3. Měření podle bodu 2a opakujte 10x pro každou osu otáčení ležící mimo těžiště tělesa. Rozměry těles, viz bod 2b, měřte na 10 různých místech pro každou stranu obdélníku, respektive pro průměr kruhové desky. Hmotnost těles stanovte pouze jedenkrát a chybu vážení odvoďte na základě přesnosti použitých vah.
4. V závěru protokolu porovnejte (pomocí tabulky) průměrné hodnoty momentu setrvačnosti získané pomocí přímé (výpočtové) a nepřímé (experimentální) metody, viz bod 2. Zhodnoťte přesnost jednotlivých metod a z nich získaných výsledků.

### Použité přístroje a pomůcky:

1. Kruhová nebo obdélníková deska, stojan s břítem a úhloměrem.
2. Posuvné měřítko, váhy a stopky.

### Základní pojmy, teoretický úvod:

#### Moment setrvačnosti

Moment setrvačnosti vyjadřuje míru setrvačných účinků tělesa při rotačním pohybu. Jeho velikost závisí na rozložení hmoty vzhledem k rotační ose a je nejmenší v případě osy procházející těžištěm tělesa. Ze vztahu (1) potom plyne, že čím dále od osy rotace je hmota tělesa rozložena, tím větší je moment setrvačnosti.

Moment setrvačnosti vzhledem k libovolné ose lze pro tělesa se spojitě rozloženou hmotou vyjádřit vztahem:

$$J = \int r^2 dm, \quad (1)$$

kde  $r$  je vzdálenost elementu hmotnosti  $dm$  od této osy rotace.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



Skutečnost, že moment setrvačnosti je nejmenší, ze všech rovnoběžných os rotace pro osu procházející těžištěm tělesa, vyjadřuje **Steinerova věta**.

### Steinerova věta

Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k libovolně zvolené rotační ose  $J$  je roven součtu momentu setrvačnosti vzhledem k rovnoběžné ose jdoucí těžištěm tělesa  $J_T$  a součinu  $m \cdot L^2$ :

$$J = J_T + m \cdot L^2 \quad (2)$$

kde  $m$  je hmotnost tělesa a  $L$  je kolmá vzdálenost zvolené rotační osy od rovnoběžné osy procházející těžištěm.

Pro tělesa pravidelných geometrických tvarů s homogenně rozloženou hmotou lze moment setrvačnosti určit z rovnice (1). Pro moment setrvačnosti vzhledem k těžišti **obdélníkové desky** o hmotnosti  $m$  a stranách  $a$ ,  $b$  platí:

$$J_T = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) \quad (3)$$

Pro moment setrvačnosti **kruhové desky** vzhledem k ose jdoucí těžištěm tělesa platí následující vztah (kde  $R$  je poloměr kruhové desky):

$$J_T = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \quad (4)$$

### Principy jednotlivých metod:

Moment setrvačnosti pomocí **přímé metody** lze určit na základě znalosti rozměrů a hmotností studovaných těles (obdélníkové a kruhové desky) podle vztahů (3) a (4). U **nepřímé metody** budeme k námi studovaným tělesům přistupovat jako k fyzickým kyvadlům, u nichž budeme opakovaně měřit doby kmitů pro dané osy rotace.

### Fyzické kyvadlo

Fyzickým kyvadlem může být libovolné těleso kývající se v tíhovém poli kolem osy neprocházející těžištěm tohoto tělesa. Nejkratší doba, po níž se pohyb tělesa z výchozího bodu sledování opakuje, je **doba kmitu**  $T$ , definovaná vztahem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgL}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \quad (5)$$

Kde:  $L$  – vzdálenost těžiště od osy otáčení,  $m$  - hmotnost kyvadla,  $g$  – tíhové zrychlení,  $J$  – moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení,  $\alpha$  – maximální úhlová výchylka těžiště z rovnovážné polohy.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



Pro malá  $\alpha$ , cca  $10^\circ$  (pro  $\alpha = 10^\circ$  je chyba asi 0.1 %, pro  $\alpha = 20^\circ$  je chyba už skoro 1 %), se dá vztah (5) zjednodušit následovně:

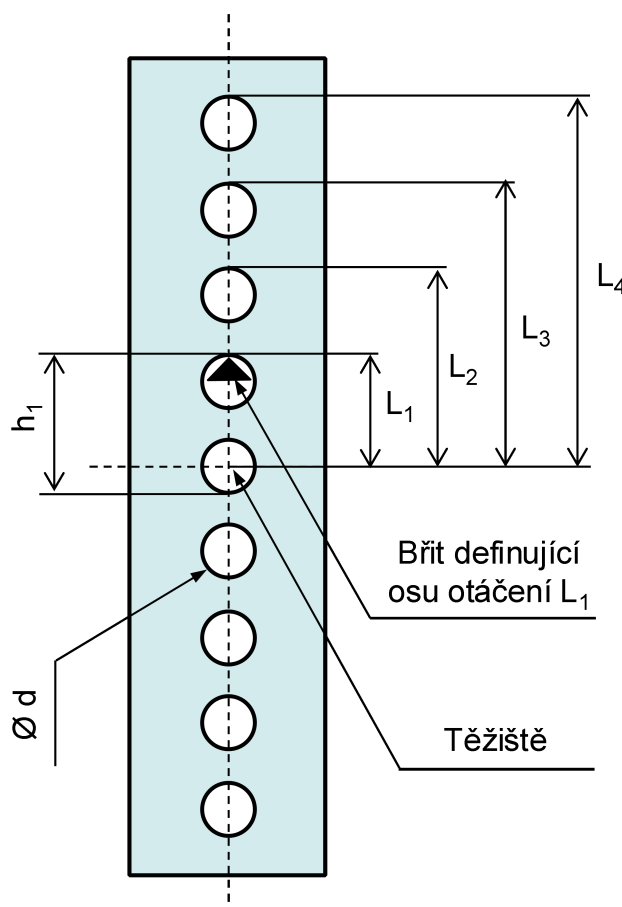
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgL}} \Rightarrow J = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot mgL \quad (6)$$

**Dobu jednoho kmitu** lze rovněž definovat jako dvojnásobek doby kyvu. **Doba jednoho kyvu** je doba, kterou kyvadlo potřebuje k pohybu z rovnovážné polohy do krajní výchylky a zpět do rovnovážné polohy nebo jinak řečeno doba potřebná k pohybu kyvadla z jedné krajní výchylky do druhé krajní výchylky na opačné straně.

### Postupy měření a pokyny k úloze:

Postup pro určení polohy rotační osy vzhledem k ose procházející těžištěm tělesa je znázorněn na obr. 1. Například pro určení nejbližší rotační osy vzhledem k těžišti,  $L_1$ , se postupuje následovně: změříme vnější rozteč středního a nejbližšího otvoru  $h_1$ . Od této vzdálenosti odečteme polovinu průměru otvoru  $d/2$  a dostáváme vzdálenost  $L_1$ , tj. platí:

$$L_1 = h_1 - \frac{d}{2} \quad (7)$$



**Obr. 1:** Určení osy rotace vzhledem k těžišti tělesa u obdélníkové desky.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta technologická

## 1. Měření momentu setrvačnosti přímou metodou

- Pomocí posuvného měřítka 10x změřte obě strany obdélníka nebo průměr kruhové desky na různých místech. Hmotnost těles stanovte pouze jedenkrát a chybu vážení odvoďte na základě přesnosti použitých vah.
- Z naměřených hodnot vypočítejte průměrné hodnoty rozměru s chybou měření.
- Na základě získaných výsledků vypočítejte pro daná tělesa moment setrvačnosti  $J_T$ , podle vztahu (3) a (4).
- Zaznamenejte všechny naměřené hodnoty a výsledky do tabulek podle zadání laboratorního cvičení.

## 2. Měření momentu setrvačnosti z doby kmitu

- Minimálně 5x změřte vzdálenost jednotlivých os otáčení od těžiště zvoleného tělesa, viz obr. 1 a vypočítejte jejich průměrné hodnoty s chybami měření.
- Pro každou osu rotace, ležící mimo těžiště tělesa měřte 10x dobu 20 kmitů. Z měření určete průměrné doby jednotlivých kmitů s chybami měření.
- Pomocí rovnice (6) vypočítejte momenty setrvačnosti  $J$  vzhledem k nastaveným rotačním osám ležícím mimo těžiště tělesa. Tyto hodnoty přepočítejte pomocí Steinerovy věty (2) na hodnoty  $J_T$ , z nichž následně vypočítejte průměrnou hodnotu s chybou měření.
- Zaznamenejte všechny naměřené hodnoty a výsledky do tabulek podle zadání laboratorního cvičení.
- V závěru protokolu porovnejte výsledky získané jednotlivými metodami.

### Seznam použité a doporučené literatury:

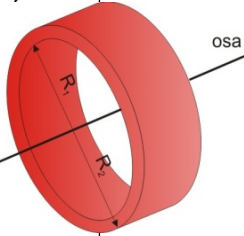
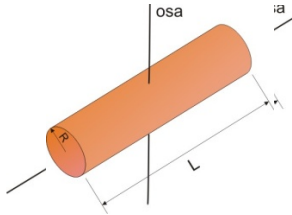
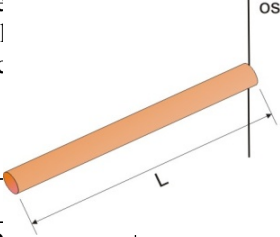
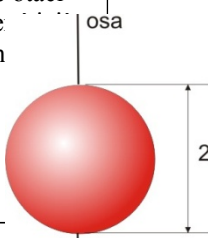
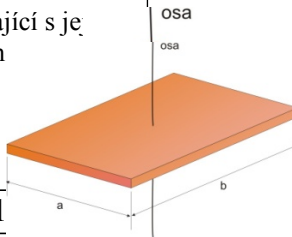
- [1] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika, VUT v Brně, Nakladatelství VUTIUM, (2000).
- [2] Kvasnica J., a kolektiv: Mechanika, Academia, Nakladatelství AV ČR, Praha (2004).

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem  
a státním rozpočtem České republiky.



**Příloha č. 1: Momenty setrvačnosti některých homogenních těles [1]**

(data uvedená v této příloze nebudou součástí vstupního testu)

	<p>Obruč se otáčí kolem své geometrické osy</p>		<p>Dutý válec (prstenec) se otáčí kolem své geometrické osy</p>
	$J = \frac{1}{2} mR^2$		$J = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2)$
	<p>Plný válec (disk) se otáčí kolem své geometrické osy</p>		<p>Plný válec (disk) se otáčí kolem osy vedené jeho středem kolmo k jeho podélné geometrické ose</p>
	$J = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mL^2$		$J = \frac{1}{3} mL^2$
	<p>Tenká tyč se otáčí kolem osy vedené středem kolmo k její délce</p>		<p>Tenká tyč se otáčí kolem osy vedené jedním z jejích konců kolmo k její délce</p>
	$J = \frac{1}{12} mL^2$		$J = \frac{1}{3} mL^2$
	<p>Plná koule se otáčí kolem osy vedené středem</p>		<p>Kulová slupka se otáčí kolem osy vedené jejím středem</p>
	$J = \frac{2}{5} mR^2$		$J = \frac{2}{3} mR^2$
	<p>Obruč se otáčí kolem osy splývající s jejím průměrem</p>		<p>Deska se otáčí kolem příčné osy vedené jejím středem</p>
	$J = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$		$J = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



evropský sociální fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta technologická