

Kinematika II

Vrhy

Galileo Galilei již před čtyřmi staletími, kdy studoval pád různých těles ze šikmé věže v Pise, zjistil, že všechna tělesa se pohybují se stálým zrychlením směřujícím svisle dolů – můžeme-li zanedbat odpor prostředí. Toto zrychlení nazýváme tíhovým zrychlením, značíme ho g . Tíhové zrychlení závisí na zeměpisné šířce a nadmořské výšce. Na 45° severní šířky u hladiny moře bylo stanoveno takzvané normální tíhové zrychlení na $9,80665 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Směrem k pólům tíhové zrychlení roste, ve Zlíně je asi $9,8100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Dosadíme-li za tíhové zrychlení při výpočtech $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, dopustíme se menší nepřesnosti, než když zanedbáváme odpor prostředí. Pokud hmotný bod vrhneme nějakou rychlostí nějakým směrem, nazýváme jeho pohyb **vrh**. Jedná se o pohyb rovnoměrně zrychlený, kdy má hmotný bod nějakou počáteční rychlost a zrychlení je konstantní a směřuje svisle dolů. Při vrhu se vždy jedná o pohyb ve svislé rovině, je proto vhodné zavést soustavu souřadnic tak, aby osa x měla směr vodorovné složky rychlosti a osa z byla svislá. Protože jde o rovnoměrně zrychlený pohyb, nemusíme používat obecné rovnice (1.4) a (1.5), ale vystačíme se vztahem (1.8). Navíc platí princip nezávislosti pohybů a můžeme pohyby v různých osách počítat nezávisle.

Pro pohyb v ose x můžeme vztah (1.8) upravit na

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0, \quad (2.1)$$

víme ale, že zrychlení je vždy svislé. To znamená, že vodorovná složka zrychlení je nulová $a_x=0$. Pak můžeme pro pohyb ve směru osy x vztah (2.1) zjednodušit na

$$x = v_{0x} t + x_0 \quad (2.2)$$

a analogicky pro pohyb v ose z na

$$z = \frac{1}{2} a_z t^2 + v_{0z} t + z_0. \quad (2.3)$$

Vrh svislý

O vrhu svislém mluvíme, když vrhneme hmotný bod svisle vzhůru nebo svisle dolů. Speciálním případem vrhu svislého je volný pád, kdy je těleso volně vypuštěno z nějaké výšky. Při vrhu svislém je vodorovná složka rychlosti nulová a vztah (2.2) nám přejde na $x=x_0$. Hmotný bod se ve vodorovném směru nepohybuje a jeho souřadnice x se nemění.

Ve svislém směru má zrychlení a_z velikost g a směřuje svisle dolů. Platí tedy $a_z = -g$. Hmotný bod je vržen rychlostí v_0 svisle vzhůru, pak $v_{0z} = v_0$. Nebo svisle dolů, pak $v_{0z} = -v_0$. Počáteční výška je z_0 . Rovnici (2.3) můžeme přepsat ve tvaru

$$z = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 t + z_0, \quad (2.4)$$

kde v_0 bereme kladně, je-li hmotný bod vržen vzhůru, a záporně, je-li vržen dolů.

Zadání:

Těleso je vrženo svisle dolů rychlostí $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ z výšky 12 m. Za jak dlouho dopadne?

Řešení:

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Když těleso dopadne, má nulovou výšku $z=0$. Známe g , v_0 i z_0 . Dosadíme do (2.4)

$$-5t^2 - 2t + 12 = 0.$$

Kvadratickou rovnicí vyřešíme a získáme kořeny $t_1 = -1,76$ s a $t_2 = 1,36$ s. Smysl má řešení, kdy těleso dopadne teprve potom, co bylo vypuštěno, to znamená, je-li čas kladný. Těleso dopadne za 1,36 s.

Vrh vodorovný

O vrh vodorovný se jedná, když je hmotný bod vržen vodorovně (ve směru osy x) nějakou počáteční rychlostí. Tíhové zrychlení g směřuje svisle dolů, proto $a_x = 0$ a $a_z = -g$. Počáteční rychlost v_0 je vodorovná, platí $v_{0x} = v_0$ a $v_{0z} = 0$. Těleso je vrženo z výšky z_0 , počátek soustavy je rozumné zvolit tak, aby $x_0 = 0$.

Rovnici (2.2) popisující pohyb ve směru osy x můžeme přepsat do tvaru

$$x = v_0 t. \quad (2.5)$$

Ve vodorovném směru jde o pohyb rovnoměrný. Ve svislém směru je počáteční rychlost nulová a jedná se o volný pád – vztah (2.3) se zjednoduší na

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0. \quad (2.6)$$

Zadání:

Jak daleko od paty srázu o výšce 20 m dopadne těleso vržené vodorovně rychlostí $12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$?

Řešení:

Rychlost je vodorovná, jedná se o vrh vodorovný. $z_0 = 20$ m je výška srázu. Z rovnice (2.6) vypočítáme, za jak dlouho těleso dopadne ($z = 0$)

$$0 = -5t^2 + 20,$$

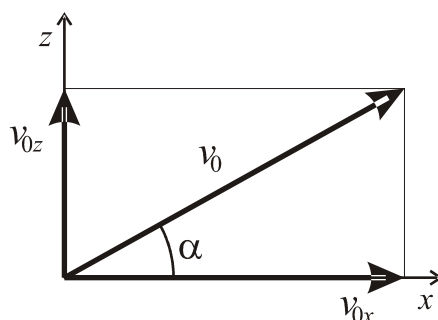
$$t = \sqrt{4} = 2 \text{ s}.$$

Vzdálenost od paty srázu (tedy souřadnici x) v okamžiku dopadu $t = 2$ s určuje rovnice (2.5)

$$x = 12 \cdot 2 = 24 \text{ m}.$$

Těleso dopadne 24 m od paty srázu.

Vrh šikmý



Obr. 2.1: Rozklad rychlosti

Nejobecnějším případem vrhu je vrh šikmý, kdy je těleso vrženo šikmo vzhůru (obr. 2.1) nebo dolů rychlostí v_0 pod **elevačním úhlem** α vzhledem k vodorovné rovině (ose x). Dělostřelci elevačnímu úhlu α říkají **náměr**. Je-li $\alpha = \pm 90^\circ$, jde o vrh svislý, je-li $\alpha = 0^\circ$, jedná se o vrh vodorovný. Tíhové zrychlení g směřuje svisle dolů, proto $a_x = 0$ a $a_z = -g$. Počáteční rychlost v_0 lze rozepsat do složek a platí tedy $v_{0x} = v_0 \cdot \cos(\alpha)$ a $v_{0z} = v_0 \cdot \sin(\alpha)$. Těleso je vrženo z výšky z_0 , počátek soustavy je zpravidla volen tak, aby $x_0 = 0$.

Rovnici (2.2) popisující pohyb ve směru osy x můžeme přepsat ve tvaru (obr. 2.1)

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$x = v_{0x}t = v_0 \cos(\alpha) t. \quad (2.7)$$

Rovnici (2.3) můžeme potom upravit do tvaru

$$z = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0z}t + z_0 = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin(\alpha) t + z_0, \quad (2.8)$$

Zadání:

Projektíl je vystřelen z věže vysoké 40 m pod úhlem 25° směrem vzhůru rychlostí 15 m.s⁻¹. Jakou rychlostí a v jaké vzdálenosti dopadne na vodorovnou rovinu?

Řešení:

Nejdřív spočítáme vodorovnou a svislou složku rychlosti: $v_{0x} = 15 \cdot \cos(25^\circ) = 13,6 \text{ m.s}^{-1}$ a $v_{0z} = v_0 \cdot \sin(25^\circ) = 6,3 \text{ m.s}^{-1}$. Dále zjistíme, za jak dlouho od výstřelu projektíl dopadne na vodorovnou rovinu. Když projektíl dopadne, je jeho souřadnice z nulová; z rovnice (2.8) získáme kvadratickou rovnici

$$-5t^2 + 6,3t + 40 = 0,$$

kteřá má kořeny $t_1 = -2,27 \text{ s}$ a $t_2 = 3,53 \text{ s}$. Fyzikální smysl má kladný kořen. Čas t_2 dosadíme do (2.7) a vypočítáme $x = 13,6 \cdot 3,53 = 48 \text{ m}$. Střela dopadne ve vzdálenosti 48 m od paty věže. Nyní určíme rychlost. Ve vodorovném směru se jedná o pohyb rovnoměrný, vodorovná složka rychlosti je proto konstantní $v_x = 13,6 \text{ m.s}^{-1}$. Ve svislém směru jde o pohyb rovnoměrně zrychlený. Podle vztahu (1.7) $v_z = -gt + v_{0z} = -35,3 + 6,3 = -29 \text{ m.s}^{-1}$. Velikost rychlosti $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = 32,0 \text{ m.s}^{-1}$. Když budeme v kapitole 4 mluvit o zachování energie, ukážeme si elegantnější řešení s využitím zákona zachování mechanické energie.

Považoval bych za nesmírně nešťastné, kdyby se někdo učil vzorce (2.4-8) z paměti. Uváděli jsme si je, aby bylo vidět, jakým stylem se kinematické úlohy řeší. Důležité jsou vztahy (1.7) a (1.8) a z nich vycházející úvahy, které veličiny mají jakou hodnotu.

Pohyb po kružnici

Pohyb můžeme vždy popsat v kartézských souřadnicích, jak jsme si ukázali v předchozích kapitolách. Ovšem ve speciálních případech může být užitečné zvolit jinou než kartézskou soustavu souřadnic. Případem, se kterým se v praxi často setkáme a kdy s výhodou použijeme polární souřadnice, je pohyb po kružnici.

Řekneme-li o hmotném bodu, že se přesunul po kružnici z polohy $r_1 = (0; 10) \text{ m}$ do polohy $r_2 = (-5; 8,6) \text{ m}$, mnoho si pod tím nepředstavíme. Řekneme-li, že hmotný bod vykonal na kružnici o poloměru 10 m třetinu otáčky, bude to názornější.

Pohyb po kružnici je zvláštním případem křivočarého pohybu, kdy středem kružnice kolmo k její rovině prochází osa otáčení (rotace). **Průvodič** (polohový vektor) směřující z počátku (středu kružnice) do pohybujícího se hmotného bodu má konstantní velikost $|r| = r$ a mění se pouze jeho směr. Směr průvodiče je popsán **úhlovou polohou** – úhlem φ , který svírá průvodič s pevně zvoleným směrem ležícím v rovině kružnice. Úhel φ se měří v úhlové míře (radiánech) a je definován jako podíl délky oblouku kružnice s příslušejícího středovému úhlu φ a poloměru této kružnice r (obr. 2.2)

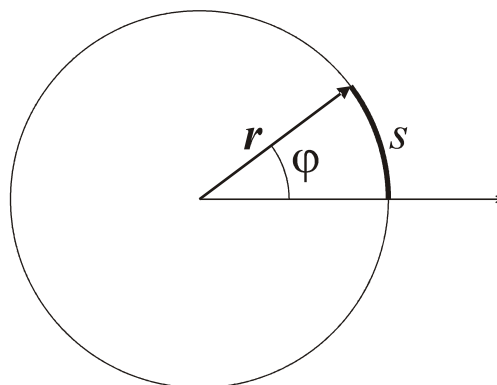
$$\varphi = \frac{s}{r}. \quad (2.9)$$

Délka kružnice je $2\pi r$ a je tedy zřejmé, že plnému úhlu 360° odpovídá 2π radiánů.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr. 2.2: Definice radiánu

Úhlová rychlost a zrychlení

Když byla poloha definována polohovým vektorem, zavedli jsme rychlost, abychom zjistili, jak se mění v čase polohový vektor, a zrychlení, které nám popisuje, jak se mění rychlost. Při pohybu po kružnici je poloha určena úhlem φ a můžeme zcela analogicky vztahu (1.2) zavést **úhlovou rychlost** ω

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.10)$$

a jako ve vztahu (1.3) **úhlové zrychlení** ε

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (2.11)$$

Protože úhel je v radiánech, čekali bychom, že úhlová rychlost bude mít jednotku $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ a úhlové zrychlení $\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$. Je ale třeba si uvědomit, že úhel v radiánech je jen poměr dvou délek a tím pádem bezrozměrné číslo. Můžeme se proto setkat s tím, že úhlová rychlost je uváděna v s^{-1} a úhlové zrychlení v s^{-2} .

Úhlovou polohu, úhlovou rychlost i úhlové zrychlení jsme zavedli jako skalární veličiny. V literatuře se můžeme setkat i s tím, že jsou tyto veličiny zavedeny jako vektorové. To může být užitečné, když se například při pohybu mění v prostoru orientace osy rotace.

Vzhledem k tomu, že vztah (2.10) formálně odpovídá vztahu (1.2) a vztah (2.11) vztahu (1.3) pouze s tím rozdílem, že místo r píšeme φ , místo v píšeme ω a místo a pak ε , musí stejně analogicky platit vztahy (1.4-1.8). Je-li například úhlové zrychlení konstantní ($\varepsilon = \text{konst.}$), můžeme analogicky k (1.8) napsat

$$\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0.$$

Vztah mezi úhlovými a dráhovými veličinami

Pokusme se nyní najít souvislost mezi úhlovými a dráhovými veličinami. Vztah mezi dráhou a úhlovou polohou je dán vztahem (2.9). Ten můžeme přepsat jako

$$s = r\varphi. \quad (2.12)$$

Derivujeme-li rovnici (2.12) podle času, derivací dráhy bude velikost rychlosti a derivací úhlové polohy úhlová rychlost (poloměr kružnice je konstanta). Dostaneme

$$v = r\omega. \quad (2.13)$$

Všimněme si, že velikost rychlosti je skalár. Derivujeme-li opět rovnici (2.13) podle času, dostaneme

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

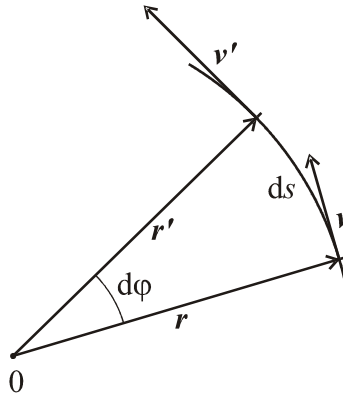


INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$a_t = r\varepsilon, \quad (2.14)$$

kde a_t je tečné zrychlení. Proč nemůžeme říct zrychlení, ale musíme říkat tečné zrychlení, si ukážeme v následující kapitole.

Tečné a normálové zrychlení



Obr. 2.3: Pohyb po kružnici

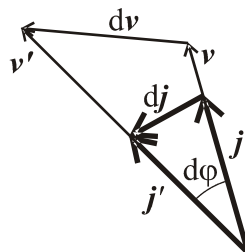
Předpokládejme, že se hmotný bod pohybuje po kruhové dráze o poloměru r . V poloze r má rychlost v , v poloze r' má rychlost v' (obr. 2.3). Mezi těmito dvěma stavy urazí bod dráhu ds , Průvodič se otočí o úhel $d\varphi$, rychlost se změní o dv . Když se změnil vektor rychlosti, znamená to, že se hmotný bod pohybuje se zrychlením. Pokusíme se nyní určit toto zrychlení. Přenesme si vektory v a v' do obrázku 2.4. Definujme jednotkový vektor j , který má směr vektoru v a jednotkovou délku. Je-li $v = |v|$, můžeme napsat $v = vj$. Tím jsme formálně oddělili vlastnosti vektoru v tak, že skalár v reprezentuje jeho velikost a jednotkový vektor j jeho směr. Zrychlení je definované podle (1.3) jako

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Rozepíšme vektor $v = vj$ a derivujeme podle času jako součin

$$a = \frac{dvj}{dt} = \frac{dv}{dt}j + v\frac{dj}{dt} = a_t + a_n. \quad (2.15)$$

Zrychlení hmotného bodu se rozpadlo na dvě složky. První složka má směr vektoru j , tedy směr rychlosti; a protože rychlost je tečná k trajektorii, má složka a_t také směr tečny k trajektorii a nazýváme ji **tečné zrychlení**. Druhá složka má směr vektoru dj , který je kolmý k j (obr. 2.4), tedy kolmý (normálový) k trajektorii. Proto složku a_n nazýváme **normálové** (nebo taky **dostředivé**) zrychlení.



Obr. 2.4: Tečná a normálová složka zrychlení

Velikost tečného zrychlení je vidět přímo z (2.15) – j má jednotkovou délku, a proto

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$a_t = \frac{dv}{dt}. \quad (2.16)$$

Všimněme si, jak je důležité rozlišovat mezi vektorem rychlosti \mathbf{v} a velikostí vektoru rychlosti v . Derivujeme-li rychlost jako vektor, získáme vektor zrychlení, derivujeme-li ji jako skalár, dostaneme jen tečnou složku zrychlení.

Nyní už je jasné, proč jsme ve (2.14) místo a napsali a_t (místo velikosti zrychlení jen velikost jeho tečné složky). Ve vztahu (2.13) vystupuje jen velikost rychlosti a tu jsme derivovali.

Pokusme se odhadnout velikost normálové složky zrychlení.

Zatím jsme zjistili

$$\mathbf{a}_n = v \frac{dj}{dt}. \quad (2.17)$$

Když podle (2.9) v obrázku 2.3 platí

$$ds = r \cdot d\varphi, \quad (2.18)$$

musí v [obrázku 2.4](#) platit

$$dj = j \cdot d\varphi, \quad (2.19)$$

kde ($j = |j|$). Ale velikost jednotkového vektoru je 1. O směr se nemusíme starat – víme, že je kolmý k trajektorii, a tak stačí zjistit velikost. Z (2.18) vyjádříme $d\varphi = ds/r$. Z (2.19) vidíme, že $dj = d\varphi$ a tedy $dj = ds/r$. Dosadíme do (2.17)

$$a_n = v \frac{ds}{dt} \frac{1}{r} = \frac{v^2}{r}. \quad (2.20)$$

Zjistili jsme, že zrychlení je možné rozepsat na dvě složky. Tečnou, která je zodpovědná za změnu velikosti rychlosti, a normálovou, která způsobuje změnu směru. Uvědomme si trochu paradoxní skutečnost, že i když se těleso pohybuje s konstantní velikostí rychlosti, může mít nenulové (normálové) zrychlení.

Klasifikace pohybů

Klasifikace (trídění) pohybů

	0	konst.	nekonst.
v	klid	rovnoměrný	zrychlený
\mathbf{v}	klid	rovnoměrný přímočarý	zrychlený
\mathbf{a}	rovnoměrný přímočarý*	rovnoměr. zrychlený	nerovnoměr. zrychlený
a_t	rovnoměrný (nepřímocharý)*	rovnoměr. zrychlený	nerovnoměr. zrychlený
a_n	přímocharý*	rovnoměr. po kružnici**	nerovnoměr. zrychlený

* existuje i triviální řešení, že hmotný bod je v klidu

** podle (2.20) $v^2/r = konst.$. To je splněno při rovnoměrném pohybu po kružnici, kdy $v = konst.$ i $r = konst.$, ale může to být splněno i při zrychleném pohybu po spirále, kde $r = v^2$.

Nemá smysl se tabulku učit z paměti. Je třeba rozumět, jak je která veličina definovaná.

Otázka může znít: Může být velikost rychlosti konstantní a zrychlení nenulové? A pak je třeba si uvědomit, že tečné zrychlení je derivací velikosti rychlosti a musí tak být nulové. Ale normálové zrychlení je dané (2.20) a je-li $v = konst.$ a zároveň $r = konst.$, bude nenulové. $v = konst.$ říká, že jde o pohyb rovnoměrný, $r = konst.$, že jde o pohyb po kružnici. Podobných otázek lze vymyslet velké množství – namátkou: Může být rychlost v nějakém okamžiku nulová a zrychlení nenulové?

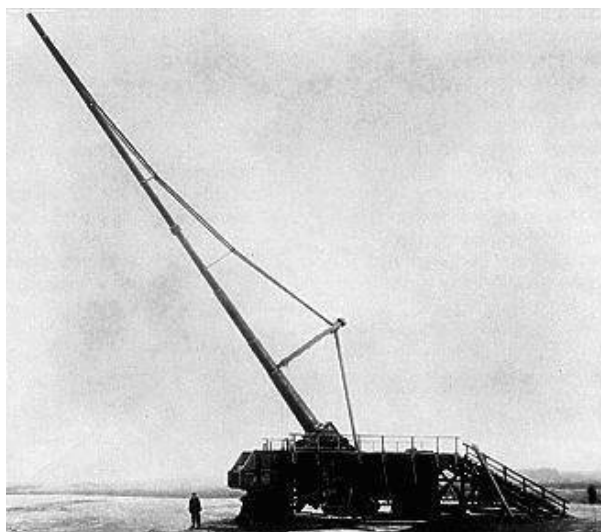
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Dodatek – Pařížské dělo

Je ráno 23. března 1918 7:17 hodin. V lesích u Crepy ozvala ohlušující rána. Přítomní tohoto historického okamžiku si zacpávají uši před tím řevem a v němém úžasu sledují, jak z hlavně o délce 34 metrů vylétl metrakový projektil a za rychlosti, která pětkrát překračovala rychlost zvuku, zmizel v obrovské výšce v oblacích. Obsluha monstrózního děla si gratuluje k prvnímu úspěšnému výstřelu z děla, které do historie vstoupí jako Pařížské dělo. Mezitím 103 kg vážící projektil desítky vteřin nabírá nadoblačnou výšku a stále stoupá po strmé dráze vzhůru. Paříž, ten samý den v 7:20 hodin, nábřeží Seiny. Nečekaná exploze na nábřeží Seiny rozbíjí sklo v oknech okolo stojících domů a poškozuje jejich stabilitu. Zmatení Pařížané se dívají na změt sutin a prachu, který stoupá z nábřeží. Nikdo nechápe co se děje. Na obloze není žádné nepřátelské letadlo a fronta je odtud vzdálená 120 km.



Pařížské dělo dokázalo vystřelit projektil o hmotnosti asi 100 kg s počáteční rychlostí $1600 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ pod elevačním úhlem 50° . Projektil doletěl za 170 s do vzdálenosti až 130 km a v nejvyšším bodě vystoupal do výšky 42 km.

[text převzat z http://www.palba.cz/portal.php?topic_id=2638,
obrázek a technická data http://en.wikipedia.org/wiki/Paris_Cannon]

Vypočítejme si parametry dráhy střely, která vyletí z nulové výšky rychlostí $1600 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ pod úhlem 50° (maximálního dostřelu je při pohybu ve vakuu dosaženo při elevaci 45° ; v tomto případě byl elevační úhel větší aby se střela pohybovala ve větších výškách, kde je řidší vzduch a klade pohybu menší odpor).

Jedná se o vrh šikmý, pro který platí vztahy (2.7) a (2.8). Počáteční rychlost má složky $v_{0x} = 1600 \cdot \cos(50^\circ) = 1028 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a $v_{0z} = v_0 \cdot \sin(50^\circ) = 1226 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Okamžik dopadu střely lze spočítat podle (2.8). Když střela dopadne, je její výška nulová: $-5t^2 + 1226t = 0$. Řešením této rovnice je $t_{max} = 245 \text{ s}$. Dosazením do (2.7) pak $x_{max} = v_{0x}t_{max} = 252 \text{ km}$. Nejvyšší výšky střela dosáhne v polovině mezi okamžikem výstřelu a dopadu $t_z = t_{max}/2 = 122 \text{ s}$. Výšku v čase t_z lze spočítat podle (2.8): $z_{max} = -5t_z^2 + 1226t_z = 81 \text{ km}$. Vypočítali jsme, že při zanedbání odporu vzduchu by střela letěla 245 s, doletěla do vzdálenosti 252 km a vystoupala při tom do výšky 81 km. Skutečné hodnoty – 170 s, 130 km a 41 km jsou výrazně nižší než vypočítané protože odpor vzduchu je při těchto rychlostech velmi významný.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ