Kapacita

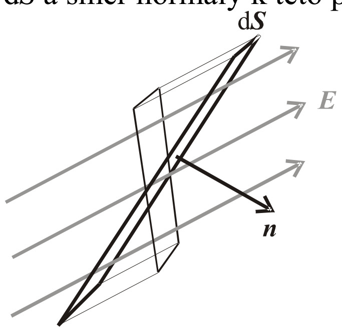
Dosud jsme se zabývali vztahy mezi náboji ve vakuu. Prostředí mezi náboji jsme charakterizovali permitivitou ε a uvedli jsme, že ve vakuu je $\varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12}$ C.V^{-1}.m^{-1}.
V této kapitole se budeme zabývat ovlivňováním elektrického pole prostředím, ve kterém se pole nachází. Každá látka se skládá z atomů, které jsou tvořeny kladným jádrem a zápornými elektrony. Každá látka obsahuje náboje. Její chování záleží na tom, jestli je v látce kladných a záporných nábojů stejné množství (pak je látka elektricky neutrální – nenabitá) a jestli jsou některé náboje v látce volně pohyblivé. Z hlediska chování v elektrickém poli rozdělujeme látky na **vodiče**, ve kterých existují volné (volně pohyblivé) náboje, a na **nevodiče** (také se lze setkat s označením **izolanty** nebo **dielektrika**). V nevodičích také existují náboje, ale jsou vázané a nemohou se pohybovat na velkou vzdálenost.

Gaussův zákon elektrostatiky

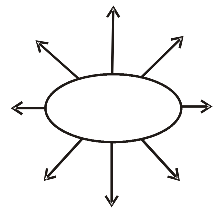
Bylo řečeno, že siločáry se konstruují tak, aby počet siločar procházející jednotkovou plochou kolmou na siločáry byl úměrný intenzitě pole v daném místě. Počet siločar procházejících nějakou plochou je úměrný intenzitě elektrického pole, velikosti plochy a úhlu, jaký svírají siločáry s plochou (plochou, která je kolmá k siločárám, jich prochází víc než stejně velkou plochou, do které siločáry vstupují šikmo).
Definujme skalární veličinu $\mathrm{d}\Phi_e$ nazvanou **tok elektrické intenzity** (nebo také **elektrický tok**), která odpovídá počtu siločar procházejících plochou:

$$\mathrm{d}\Phi_e = \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}, \tag{8.1}$$

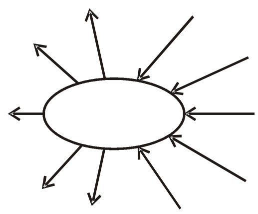
kde vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ má velikost plochy $\mathrm{d}S$ a směr normály k této ploše (obr. 8.1).



Obr. 8.1: Tok elektrické intenzity



Obr. 8.2: Siločáry vycházející z uzavřené plochy



Obr. 8.3: Siločáry procházející uzavřenou plochou

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Z nákresu elektrického pole na obr. 8.2 a 8.3 lze odhadnout, že uvnitř plochy na obr. 8.2 se nachází kladný náboj, zatímco náboj uvnitř plochy na obr. 8.3 je náboj nulový. Z podobných úvah pak plyne Gaussův zákon elektrostatiky:

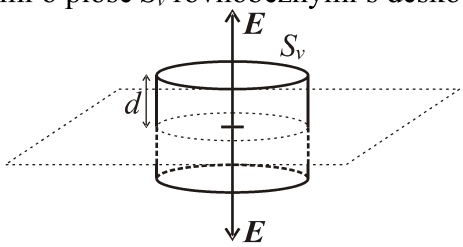
Tok elektrické intenzity uzavřenou plochou je úměrný celkovému náboji uvnitř uzavřené plochy.

$$\oiint_S \boldsymbol{E}d\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon}, \tag{8.2}$$

kde vektor d$\boldsymbol{S}$ má velikost plochy dS a směr vnější normály k této ploše, Q je náboj uvnitř uzavřené plochy a ε je permitivita prostředí.

Vzorec (8.2) nevypadá, že by se podle něj dalo něco spočítat. Ve skutečnosti nikdy nebudeme opravdu integrovat, tajemství spočívá v nalezení takové vhodné plochy, aby intenzita bylo vždy kolmá na plochu (pak $\boldsymbol{E}$d$\boldsymbol{S}$=EdS a zbavíme se skalárního součinu) nebo rovnoběžná s plochou (pak jde o skalární součin kolmých vektorů – je nulový) a navíc, aby intenzita byla po ploše konstantní (pak $\int E\mathrm{d}S = E\int \mathrm{d}S = ES$).

Zadání:
Určete intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti d od nekonečné, tenké rovinné desky, která na svém povrchu nese náboj s plošnou hustotou $\sigma = Q/S$.
Řešení:
Protože je deska nekonečně velká, je problém symetrický vzhledem ke každé ose otáčení k ní kolmé. Intenzita musí mít stejnou symetrii, musí být kolmá k desce. Zvolme válcovou uzavřenou plochu s podstavami o ploše S_v rovnoběžnými s deskou (obr. 8.4).



Obr. 8.4: Gaussův zákon pro nabitou desku

Intenzita je kolmá na podstavy válce a rovnoběžná s jeho pláštěm (tok pláštěm je tedy nulový). Proto lze vztah (8.2) přepsat:

$$\oiint_S \boldsymbol{E}d\boldsymbol{S} = E2S_v = \frac{Q}{\varepsilon},$$

kde Q je náboj uvnitř válce. Intenzita pak je

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon S_v} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}. \tag{8.3a}$$

Intenzita v blízkosti nabité plochy nezávisí na vzdálenosti, ale jen na plošné hustotě náboje. Později se setkáme s případem, kdy siločáry pole vychází z desky jen na jednu stranu. Potom je plocha, kterou prochází elektrický tok jen S (místo 2S) a intenzita je dvojnásobná:

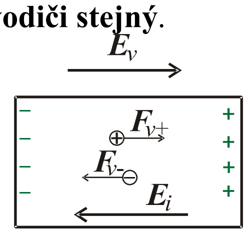
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{8.3b}$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vodič v elektrickém poli

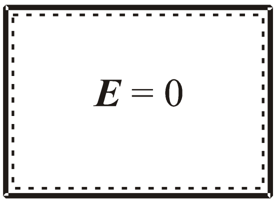
Ve vodiči existují volně pohyblivé elektrické náboje. Umístíme-li vodič do vnějšího elektrického pole $\boldsymbol{E}_v$ (obr. 8.5), bude toto pole působit na volné náboje (na obrázku jsou nakresleny jen dva) silou $\boldsymbol{F}_{v+}$ na kladný náboj a $\boldsymbol{F}_{v-}$ na záporný. Protože jsou náboje volné, budou se pohybovat ve směru těchto sil, kladné na jednu stranu a záporné na opačnou. Tím vzniknou na opačných koncích vodiče **indukované náboje** (na obr. 8.5 zelené), které budou odpuzovat náboje stejného znaménka a přitahovat opačné. Ve vodiči vznikne elektrické pole od indukovaných nábojů $\boldsymbol{E}_i$, které bude mít opačný směr než vnější pole. Dokud nebudou mít obě pole stejnou velikost, budou se volné náboje pohybovat. Ustálený stav nastane, když se obě pole vyruší, náboje se přestanou pohybovat, výsledná **intenzita uvnitř vodiče je nulová** a **potenciál je** podle (7.13) **v celém vodiči stejný**.



Obr. 8.5: Vodič v elektrickém poli

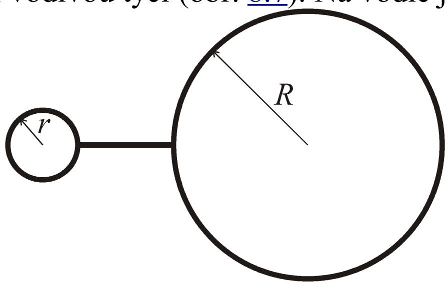
Elektrické pole nabitého vodiče

Mějme vodič, který se nachází v prostoru bez vnějšího elektrického pole. Přiveďme na vodič náboj. Pokusme se zjistit, jak se náboj ve vodiči rozmístí. Pokud přivedeme analogicky plyn do uzavřené nádoby, rozmístí se rovnoměrně po celém objemu. Elektrický náboj se však překvapivě chová jinak. Na obrázku 8.6 je zakreslen plnou čarou vodič. Dokázali jsme dříve, že intenzita elektrického pole uvnitř vodiče je nulová $\boldsymbol{E} = 0$. To ale znamená, že elektrický tok uzavřenou plochou nakreslenou čárkovaně je nulový. Podle Gaussova zákona (8.2) je náboj uvnitř čárkované plochy nulový. Přivedli jsme na vodič náboj a uvniř vodiče není – **elektrický náboj se rozloží na povrchu vodiče**.



Obr. 8.6: Elektrické pole uvnitř nabitého vodiče

Zjistěme nyní, jak bude rozložen po povrchu vodiče. Předpokládejme těleso tvořené dvěma vodivými koulemi spojenými vodivou tyčí (obr. 8.7). Na vodič je přiveden náboj.



Obr. 8.7: Rozložení náboje na povrchu vodiče

Dokázali jsme dříve, že potenciál je v celém vodiči stejný – potenciál na povrchu obou koulí je stejný. Náboj na kouli o poloměru r označme q a jeho plošnou hustotu σ ($\sigma = q/4\pi r^2$), náboj na R pak Q a jeho plošnou hustotu Σ. Potenciál na povrchu koule je dán vztahem 7.11. Musí tedy platit

$$k\frac{q}{r} = k\frac{Q}{R}.$$

Vyjádříme náboj na kouli pomocí jeho plošné hustoty

$$k\frac{4\pi r^2\sigma}{r} = k\frac{4\pi R^2\Sigma}{R}.$$

Po vykrácení platí

$$\sigma r = \Sigma R. \tag{8.4}$$

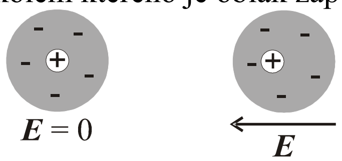
Na menší kouli je tedy větší hustota náboje. Vztah (8.4) lze zobecnit do tvrzení:

> Plošná hustota náboje na nějakém místě povrchu vodiče je nepřímo úměrná poloměru křivosti povrchu.

To znamená, že na hrotech nabitého vodiče je největší plošná hustota náboje a největší intenzita elektrického pole (intenzita je podle (8.3b) úměrná plošné hustotě náboje).

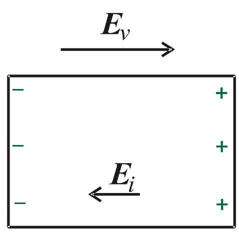
Dielektrikum v elektrickém poli

V nevodiči (dielektriku) neexistují volně pohyblivé elektrické náboje. Neznamená to ovšem, že v dielektriku nejsou náboje nebo že se nemohou pohybovat. Každá látka se skládá z atomů. Atom je tvořen kladným jádrem, kolem kterého je oblak záporných elektronů (obr. 8.8).



Obr. 8.8: Atom v nulovém a nenulovém elektrickém poli

Nenachází-li se atom v elektrickém poli, je rozložení elektronů symetrické vzhledem k poloze jádra. Vložíme-li však atom do elektrického pole, působí na jádro síla ve směru pole a na elektrony síla opačná. Jádro se tedy nepatrně posune ve směru pole a elektrony proti směru (obr. 8.8). Z hlediska celého dielektrika se všechny jeho kladné náboje posunou na jednu stranu a všechny záporné na opačnou. Nemohou se však posunout libovolně, protože jsou vázány na atomy. Proto sice na povrchy dielektrika opět vzniknou indukované náboje jako u vodiče (obr. 8.9), ale budou menší, a proto i jejich pole $\boldsymbol{E}_i$ bude slabší a nedokáže vnější pole $\boldsymbol{E}_v$ vyrušit, pouze ho zeslabí.



Obr. 8.9: Elektrické pole v dielektriku

Permitivita dielektrika

V předchozí kapitole jsme ukázali, že dielektrikum zeslabuje elektrické pole. Nyní popíšeme tento jev kvantitativně. Mějme dvě rovnoběžné desky nesoucí náboj s plošnou hustotou σ_v (obr. 8.10). Je-li vzdálenost desek malá proti jejich rozměrům, je pole mezi nimi homogenní (ve všech místech stejné) a intenzita $\boldsymbol{E}_v$ směřuje od kladné desky k záporné. Vložíme-li do elektrického pole mezi desky dielektrikum, indukují se v něm na protějších stranách indukované náboje s plošnou hustotou σ_i. Lze očekávat, že plošná hustota indukovaného náboje bude přímo úměrná intenzitě elektrického pole v dielektriku. Konstantu úměrnosti (která říká, jak moc se vázané náboje vychylují v elektrickém poli) označíme η a nazveme ji **susceptibilita dielektrika**.

$$\sigma_i = \eta\varepsilon_0 E,$$

kde ε_0 je permitivita vakua. Susceptibilita nabývá hodnot od nuly (dielektrikum ve kterém nejsou náboje - vakuum) do nekonečna (náboje jsou volně pohyblivé – vodiče).

Zvolme na obr. 8.10 gaussovu plochu ve tvaru hranolu s podstavami S rovnoběžnými s deskami. Siločáry elektrického pole prochází kolmo vnitřní podstavou gaussovy plochy. Plošná hustota náboje uvnitř gaussovy plochy $\sigma = \sigma_v - \sigma_i$. Z Gaussova zákona pak plyne pro velikost intenzity pole v dielektriku E

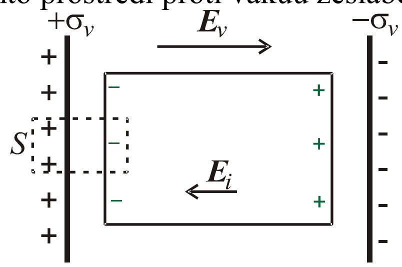
$$E = \sigma/\varepsilon_0 = (\sigma_v - \sigma_i)/\varepsilon_0 = (\sigma_v - \eta\varepsilon_0 E)/\varepsilon_0.$$

Vyjádřeme ze vztahu E

$$E(1+\eta) = \sigma_v/\varepsilon_0$$

$$E = \frac{\sigma_v}{(1+\eta)\varepsilon_0} = \frac{\sigma_v}{\varepsilon_r\varepsilon_0} = \frac{\sigma_v}{\varepsilon}.$$

Při tom jsme zavedli materiálový parametr $\varepsilon_r = (1+\eta)$ nazývaný **relativní permitivita** ($\varepsilon_r \geq 1$) a $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ nazývaný **absolutní permitivita** dielektrika. Všechny vztahy odvozené dosud pro vakuum platí i v případě, že je mezi náboji dielektrikum, pouze místo permitivity vakua musíme dosazovat absolutní permitivitu prostředí. Přestože při výpočtech dosazujeme zpravidla absolutní permitivitu, v tabulkách se většinou udává relativní permitivita. Je-li totiž uvedeno, že absolutní permitivita nejakého prostředí je $\varepsilon = 1{,}77.10^{-11}\ \mathrm{C.V^{-1}.m^{-1}}$, příliš nám to o kvalitách dielektrika neřekne. Uvedeme-li stejnou informaci ve formě $\varepsilon_r = 2{,}0$, je na první pohled zřejmé, že pole je v tomto prostředí proti vakuu zeslabeno na polovinu.



Obr. 8.10: Elektrické pole v dielektriku

Kapacita, kondenzátor

Kapacita v obecném jazyce říká, kolik se něčeho někam vejde – například kapacita autobusu je 50 cestujících. Ve fyzice kapacita říká, kolik je nějaké těleso schopno pojmout náboje. Kdo ale cestoval v pátek odpoledne autobusem z Brna do Zlína, ten ví, že kapacita 50 cestujících je čistě teoretická a v této době se autobusem může vézt i přes 100 lidí. Záleží totiž i na tom, jak se do autobusu tlačí. Stejně tak množství náboje na tělese je určeno i napětím, jaké jsme na těleso přivedli.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

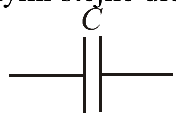
Kapacitu 1 farad má těleso, které při přivedení náboje 1 coulomb, změní potenciál o 1 volt.

$$C = \frac{Q}{U}. \tag{8.5}$$

Názornější je přepsání (8.5) do tvaru $Q = CU$, kdy je zřejmé, že náboj, který se vejde na těleso je součinem jeho kapacity a napětí.
Jednotkou kapacity je 1 farad (značí se F). 1 F = 1 C.V^{-1}.

Vodič, který má kapacitu, se nazývá **kondenzátor**.

Kondenzátor značíme dvěma rovnoběžnými stejně dlouhými úsečkami (viz. obr. 8.11).



Obr. 8.11: Kondenzátor

Kapacita kulového kondenzátoru

Nejjednodušší kondenzátor může být tvořen jednou vodivou koulí. Přivedeme-li na kouli náboj, její potenciál je dán vztahem (7.11)

$$V_e = k\frac{Q}{R}.$$

Dosadíme V_e za U do vztahu (8.5), vykrátíme Q a dostaneme

$$C = \frac{R}{k} = 4\pi\varepsilon R. \tag{8.6}$$

Odhadněme nyní kapacitu koule o poloměru 1 metr: $C = 4.3{,}14.8{,}8.10^{-11}.1 = 11.10^{-10}$ F.

Kapacita deskového kondenzátoru

V praxi se často používá kondenzátor tvořený dvěma rovnoběžnými deskami o ploše S a vzdálenosti d. Na jednu desku je přiveden náboj $+Q$, na druhou $-Q$. Intenzita mezi deskami je dána (8.3b). Protože je pole mezi deskami homogenní, napětí je podle (7.13) $U = E.d$.

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{Ed} = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\varepsilon}d} = \frac{Q}{\frac{Q}{\varepsilon S}d} = \varepsilon\frac{S}{d}. \tag{8.7}$$

Upozorněme, že (8.7) není definice kapacity kondenzátoru – tou je (8.5). Je to pouze kapacita jednoho konkrétního typu kondenzátoru.
Odhadněme nyní kapacitu deskového kondenzátoru o ploše desek 1 dm^2 a vzdálenosti desek 1 mm. Mezi deskami je vakuum. Potom $C = 8{,}8.10^{-11}.10^{-2}/10^{-3} = 8{,}8.10^{-10}$ F. Všimněme si, že koule o poloměru 1 m má stejnou kapacitu jako deskový kondenzátor o rozměrech 10x10x0,1 cm. To je důvod, proč se kondenzátory tvořené jedním vodičem nepoužívají.

Spojování kondenzátorů

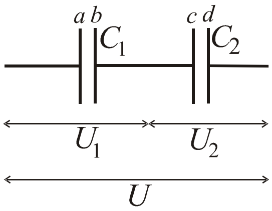
Mějme dva kondenzátory o kapacitách C_1 a C_2. Budeme se zabývat otázkou, jakou kapacitu bude mít tato dvojice při různých způsobech zapojení.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Sériové zapojení



Obr. 8.12: Sériově spojené kondenzátory

Zapojení součástek podle obr. 8.12 nazýváme sériové nebo také za sebou. Při tomto zapojení se napětí přivedené na soustavu rozdělí mezi jednotlivé součástky, platí tedy

$$U = U_1 + U_2. \qquad (8.8)$$

Náboj na všech deskách kondenzátoru má stejnou velikost. To lze dokázat následující úvahou. Vložme na desku *a* náboj $+Q$. Náboj bude odpuzovat kladné náboje z desky *b* a naopak do ní přitahovat záporné náboje. Přitahované a odpuzované náboje se budou pohybovat dokud na desce *b* nebude náboj $-Q$, pak se oba náboje na kondenzátoru 1 vyruší a nebudou působit žádnou silou na náboje v okolních vodičích. Desky *b* a *c* byly před přivedením náboje na *a* elektricky neutrální, obsahovaly tedy stejně velký kladný a záporný náboj. Když je na desce *b* náboj $-Q$, byl odčerpán z desky *c*. Na desce *c* zůstal náboj $+Q$. Ten přitahuje záporný náboj $-Q$ do desky *d*. Na všech deskách je stejně velký náboj. Pro náboje na kondenzátorech lze napsat

$$Q = Q_1 = Q_2. \qquad (8.9)$$

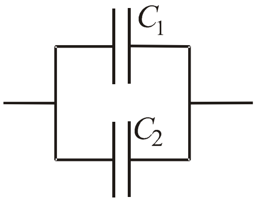
Vyjádříme z (8.5) napětí $U = Q/C$ a dosadíme do (8.8)

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2},$$

s uvážením (8.9) pak

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \qquad (8.10)$$

Paralelní zapojení



Obr. 8.13: Paralelně spojené kondenzátory

Zapojení součástek podle obr. 8.13 nazýváme paralelní nebo také vedle sebe. Při tomto zapojení se náboj přivedený na soustavu rozdělí mezi jednotlivé součástky, platí tedy

$$Q = Q_1 + Q_2. \qquad (8.11)$$

Levé desky na obr. 8.13 jsou vodivě spojeny, tvoří jeden kus vodiče a musí proto mít stejný potenciál. Stejně tak mají stejný potenciál i pravé desky. Rozdíl potenciálů (napětí) na obou kondenzátorech je stejný

$$U = U_1 = U_2. \qquad (8.12)$$

Vyjádříme z (8.5) náboj $Q = CU$ a dosadíme do (8.11)

$$CU = C_1U_1 + C_2U_2.$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

s uvážením (8.12) pak

$$C = C_1 + C_2. \tag{8.13}$$

Energie nabitého kondenzátoru

Mějme nenabitý deskový kondenzátor C. Nabíjení takového kondenzátoru můžeme provést tak, že přeneseme malý kladný náboj dq z levé desky na pravou. Levá deska získá náboj –dq a pravá +dq. Při přenosu nevykonala vnější síla žádnou práci, protože mezi deskami bylo nulové napětí. Tím, že mezi deskami byl přenesen nějaký náboj, se kondenzátor nabil a mezi deskami se objevilo napětí $u = q/C$. Při přenesení dalšího malého náboje dq už bylo třeba vykonat práci podle (7.9)

$$\mathrm{d}W = u.\mathrm{d}q. \tag{8.14}$$

Pro přenesení celého náboje Q je třeba sečíst všechny elementární práce (8.14) – integrovat tento vztah

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \frac{1}{C}\int_0^Q q\mathrm{d}q = \frac{1}{C}\left[\frac{q^2}{2}\right]_0^Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}. \tag{8.15}$$

S použitím (8.5) lze (8.15) přepsat:

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU \tag{8.16abc}$$

Všimněme si, že v případě, kdy se náboj přemístí ve vnějším poli, vykoná se práce podle (7.15). Podle (8.16) je práce poloviční, protože pole si vytváří teprve přenášený náboj a rozdíl potenciálů mezi deskami postupně roste z nuly na U.

Energie vypočítaná podle (8.16) není ve skutečnosti energie kondenzátoru, ale **energie elektrického pole** mezi deskami. Pokusme se ji vyjádřit pomocí intenzity elektrického pole. Napětí mezi deskami nabitého kondenzátoru lze napsat pomocí intenzity pole jako $U = E.d$. Kapacita deskového kondenzátoru je odvozena v (7.5). Dosaďme obě veličiny do (8.16b)

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{S}{d}E^2d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon SdE^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2V, \tag{8.17}$$

kde $V = S.d$ je objem mezi deskami kondenzátoru (ne potenciál, který značíme také V). Zaveďme hustotu energie elektrického pole w jako energii jednotkového objemu. Potom

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2. \tag{8.18}$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ