Úloha č. 3

Měření tíhového zrychlení matematickým a reverzním kyvadlem

Úkoly měření:

1. Určete tíhové zrychlení pomocí reverzního a matematického kyvadla.

   Pro stanovení tíhového zrychlení, viz bod 1, měřte průměrnou dobu 10 až 20 kmitů pomocí digitálních stopek.

2. Pro stanovení tíhového zrychlení pomocí reverzního kyvadla najděte takovou rovnovážnou polohu a_0 (změnou polohy závaží) v níž je doba kmitů kolem obou pevně daných os stejná a jejich vzájemná vzdálenost je nazývána tzv. redukovanou délkou. Výsledky tohoto měření zaznamenejte do grafu závislosti průměrné doby kmitu T (s) na poloze závaží a (cm).

3. Měření podle bodu 1, 2 a 3 opakujte třikrát pro jednotlivá kyvadla a zvolené nastavení závaží. Pro každou zvolenou metodu vypočítejte průměrnou hodnotu tíhového zrychlení.

4. V závěru protokolu porovnejte průměrné hodnoty tíhového zrychlení získané z jednotlivých metod, viz bod 1 a 2, s tabelovanou hodnotou tíhového zrychlení. Zhodnoťte přesnost jednotlivých metod a z nich získaných výsledků.

Použité přístroje a pomůcky:

1. Závěs pro reverzní a matematické kyvadlo, reverzní kyvadlo, závaží, provázek, doraz pro uvolnění kyvadel pod požadovaným úhlem, držák kamery.
2. Stopky, kamera, počítač, software pro střih videa, metr, mikrometr, nůžky.

Základní pojmy, teoretický úvod:

Gravitace

Gravitace je přitažlivé silové působení mezi všemi formami hmoty a má nekonečný dosah. Pro malé rychlosti a slabá pole se k popisu tohoto působení používá **Newtonův gravitační zákon**. Tento zákon nelze použít pro silná pole a velké rychlosti blížící se rychlosti světla, kde se používá relativistická teorie, kterou se nyní nebudeme podrobněji zabývat.

Newtonův gravitační zákon:

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

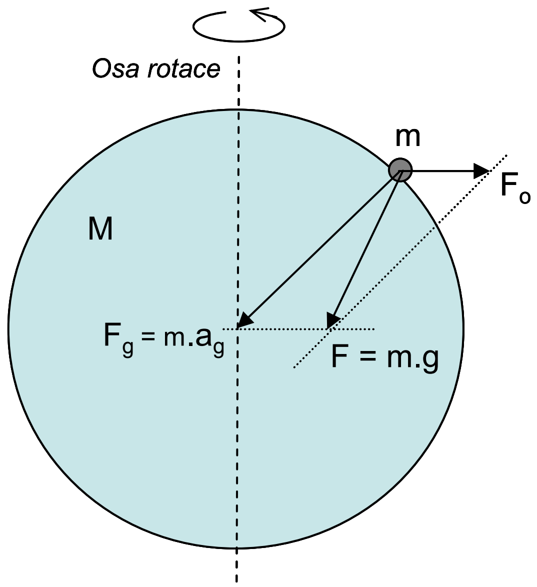
Gravitační síla F_g, kterou se přitahují každé dva hmotné body je přímo úměrná součinu jejich hmotností m_1, m_2 a nepřímo úměrná čtverci jejich vzdálenosti r^2.

$$F_g = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \tag{1}$$

kde G je gravitační konstanta s hodnotou $6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}.

Tíhové vs. gravitační zrychlení

Tíhové zrychlení g (m.s^{-2}) je zrychlením padajícího tělesa v gravitačním poli Země v důsledku gravitační síly F_g a odstředivé síly F_o, vznikající při rotačním pohybu Země, viz obr. 1. Z druhého Newtonova zákona tedy plyne, že tíhové zrychlení g je rovno podílu tíhové síly F a hmotnosti tělesa m.



Obr. 1: Vztah mezi gravitačním a tíhovým zrychlením.

Proto je nutné rozlišovat mezi gravitačním zrychlení a_g (pro Zemi v klidu) a tíhovým zrychlením g (pro rotující Zemi). Vzhledem k rotaci Země a jejímu tvaru, je jasné, že tíhové zrychlení bude záviset na zeměpisné šířce (rozdílné vzdálenosti od osy rotace) a nadmořské výšce, proto zavádíme pojem normální tíhové zrychlení.

Jako **normální tíhové zrychlení** se definuje pro 45° severní zeměpisné šířky při hladině moře hodnota:

$$\mathbf{g = 9{,}80665\ m.s^{-2}}$$

Experimentálně zjištěný vztah pro závislost tíhového zrychlení na zeměpisné šířce a nadmořské výšce nebudeme rozvádět. Omezíme se pouze na stanovení tíhového zrychlení pomocí námi používaných technik, viz níže.

Principy jednotlivých metod:

Fyzické kyvadlo

Fyzickým kyvadlem může být libovolné těleso kývající se v tíhovém poli kolem osy neprocházející těžištěm tohoto tělesa. Nejkratší doba, po níž se pohyb tělesa z výchozího bodu sledování opakuje, je **doba kmitu** T, definovaná vztahem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right). \qquad (2)$$

Kde: L – vzdálenost těžiště od osy otáčení, m - hmotnost kyvadla, g – tíhové zrychlení, J – moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení, α – maximální úhlová výchylka těžiště z rovnovážné polohy.

Pro malá α, se dá vztah (2) zjednodušit následovně:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL}} \; . \qquad (3)$$

Matematické kyvadlo

Matematické kyvadlo je zjednodušeným případem fyzického kyvadla v podobě hmotného bodu upevněného na konci nehmotného závěsu délky L, jehož druhý konec se může volně otáčet okolo osy procházející místem závěsu. Pro dobu kmitu platí vztah (2), respektive pro malé úhly vztah (3), který můžeme upravit následovně, když víme, že pro moment setrvačnosti v tomto případě platí $J = m.L^2$:

$$\boxed{T_m = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \Rightarrow \quad pro\ mal\acute{e}\ \ \alpha \quad \Rightarrow \quad T_m = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right).} \qquad (4)$$

Ze vztahu (4), pro malé α (pro α = 10° je chyba asi 0.1 %, pro α = 20° je chyba už skoro 1 %), lze jednoduchou úpravou získat vztah pro výpočet tíhové zrychlení g, z měření doby kmitu pomocí matematického kyvadla, ve tvaru:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T_m^{\,2}} \; . \qquad (5)$$

Reverzní kyvadlo

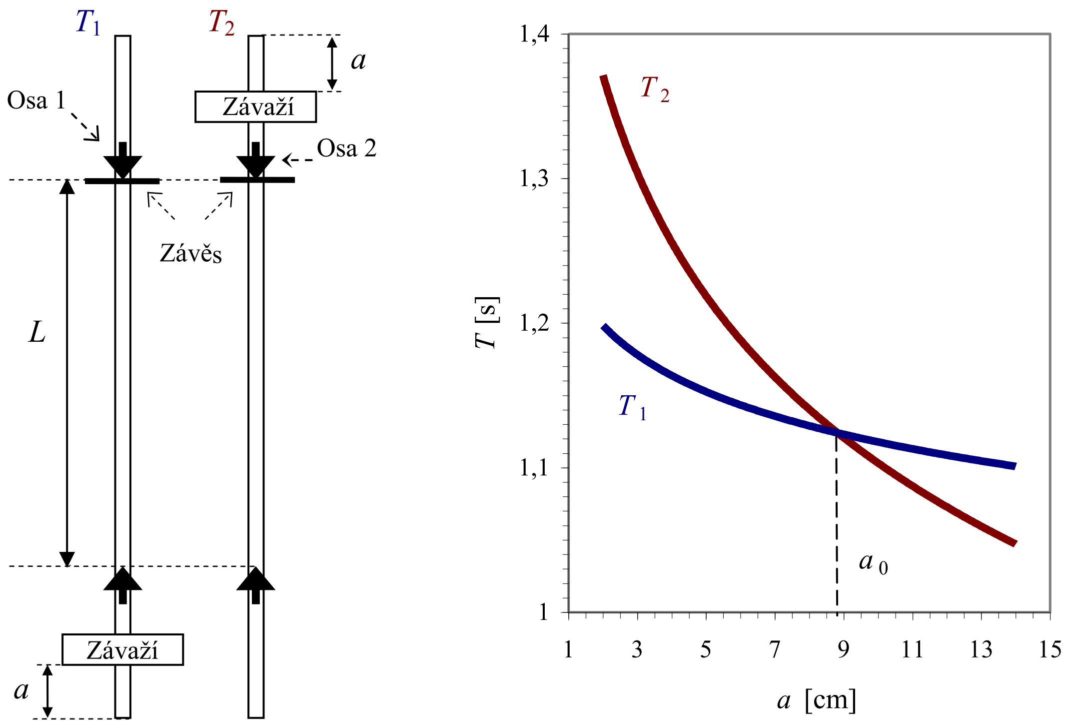
Reverzní kyvadlo je zvláštním případem fyzického kyvadla, u něhož mají dvě osy otáčení, ležící v rovině těžiště tělesa, konstantní dobu kmitů T_r. Pokud doba kmitů není stejná, jedná se o fyzické kyvadlo. Existují dvě situace, v nichž lze dostat konstantní dobu kmitů:

1) pokud jsou obě osy otáčení symetricky umístěny vzhledem k těžišti,
2) pokud jsou tyto dvě osy vzdáleny o tzv. redukovanou délku fyzického kyvadla L_r.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky.

Experimentální měření, jenž bude prováděno v naší laboratoři, se týká druhého případu. Nemusíme tedy výpočtem nebo experimentálně hledat těžiště soustavy a nastavovat osy otáčení.

Schéma námi používaného reverzního (fyzického, před nastavení redukované délky L_r) kyvadla je uvedeno na obrázku č. 2 vlevo. Toto kyvadlo je tvořeno železnou tyčí s dvěma rovnoběžnými břity vzdálenými o pevnou vzdálenost L. Na jednom konci tyče je umístěno přemístitelné závaží, sloužící k dosažení nesymetričnosti celé soustavy vhodnou volbou vzdálenosti a, tak aby mělo kyvadlo stejnou dobu kmitů okolo obou pevně daných os (tj. okolo pevných břitů se závažím v horní a spodní poloze).



Obr. 2: Schéma reverzního kyvadla s jeho nastavením do dvou pozic pro zjištění polohy závaží a_0 (vlevo), graf znázorňující hledanou polohu a_0 (vpravo).

Poloha a v níž je doba kmitání T stejná okolo obou os, daných břity železné tyče, je mezní polohou a_0. Tuto polohu můžeme prakticky zjistit pomocí grafické interpolace uvedené na obrázku 2 vpravo tak, že budou měřeny doby kmitů pro zvolené polohy závaží a v horní a spodní poloze závaží.

Po experimentálním zjištění a nastavení polohy a_0, viz obr. 2, se z našeho fyzického kyvadla stává reverzní. Z toho plyne, že délku L můžeme označit jako redukovanou L_r a dobu kmitů T jako T_r, pro niž platí následující vztah, pro malé α:

$$\boxed{T_r = 2\pi\sqrt{\frac{L_r}{g}}}, \tag{6}$$

z něhož lze určit hodnotu tíhového zrychlení g stejnou úpravou jako v případě vztahu (4).

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Postupy měření a pokyny k úloze:

1. Měření tíhového zrychlení pomocí matematického kyvadla

- Nehmotným závěsem simulujícím zavěšení v případě matematického kyvadla bude tenký provázek délky 80-100 cm. Hmotným bodem bude závažíčko, k němuž se přiváže provázek uchycený druhým koncem k pevném závěsu tak, aby byla přesně definovaná osa otáčení. Následně se přesně změří délka závěsu od místa uchycení (osy otáčení) ke středu závažíčka.
- Pomocí stopek třikrát změřte dobu 20 kmitů zavěšeného závaží, s malou počáteční výchylkou od rovnovážné polohy. Měření zopakujte s použitím záznamu obrazu do počítače pomocí webové kamery pro cca 20 kmitů při vychýlení 10°, 20° a 30°. Z analýzy záznamu, pomocí přiloženého softwaru ke kameře, zjistěte dobu deseti kmitů při jednotlivých vychýleních.
- Z naměřených hodnot, pro každou z použitých metod (stopky, záznam obrazu) stanovte průměrné doby jednotlivých kmitů s chybou měření. Vypočítejte hodnoty tíhového zrychlení a průměrnou hodnotu s chybou měření.
- Pečlivě zaznamenejte podmínky měření jako je délka závěsu, úhel vychýlení, hmotnost závaží, atd.
- Zpracujte výsledky do tabulek a grafů podle zadání laboratorního cvičení.

2. Měření tíhového zrychlení pomocí reverzního kyvadla

- Podle zadání v laboratorním cvičení nastavte 5 různých poloh závaží a v horní a spodní poloze podle obr. 2 vlevo. U každé nastavené polohy závaží změřte pomocí stopek třikrát dobu 10 kmitů pro malé počáteční vychýlení od rovnovážné polohy. Z naměřených hodnot sestrojte závislost T na a, viz obr. 2 vpravo a určete hodnotu a_0.
- Při nastavené hodnotě a_0 (se závažím nahoře a následně dole) změřte pomocí stopek 3x dobu 10 kmitů při malém počátečním vychýlení od rovnovážné polohy. Měření zopakujte s použitím záznamu obrazu do počítače pomocí webové kamery pro cca 20 kmitů při vychýlení 10°, 20° a 30°. Z analýzy záznamu, pomocí přiloženého softwaru ke kameře, zjistěte dobu deseti kmitů.
- Z naměřených hodnot, pro každou z použitých metod (stopky, záznam obrazu), stanovte průměrné doby jednotlivých kmitů s chybou měření. Vypočítejte hodnoty tíhového zrychlení a průměrnou hodnotu s chybou měření.
- Pečlivě zaznamenejte podmínky měření jako redukovaná délka kyvadla, polohy závaží, časy všech měření, úhly vychýlení, atd.
- Zpracujte výsledky do tabulek a grafů podle zadání laboratorního cvičení, včetně postupu pro stanovení hodnoty a_0.

Seznam použité a doporučené literatury:

[1] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika, VUT v Brně, Nakladatelství VUTIUM, (2000).
[2] Kvasnica J., a kolektiv: Mechanika, Academia, Nakladatelství AV ČR, Praha (2004).

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ