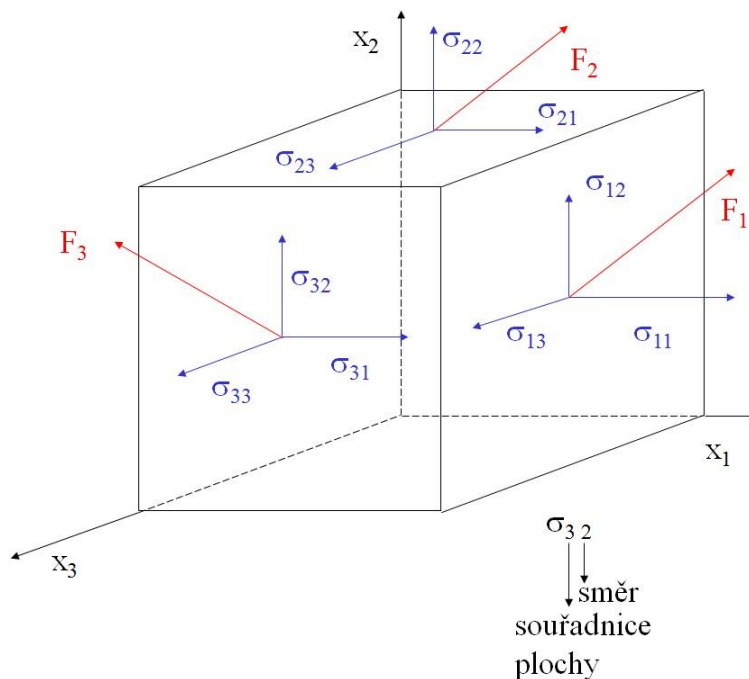


## 7 Lineární elasticita

Elasticita je schopnost materiálu pružně se deformovat.

Deformace ideálně elastických látek je okamžitá (časově nezávislá) a dokonale vratná.

Působí-li na infinitezimální objemový element soustava sil  $F_1, F_2, F_3$ , je napjatost elementu určena 9 složkami napětí: 6 smykovými a 3 normálovými (Obr. 7.1):



Obr. 7.1: Napjatost v objemovém infinitezimálním elementu

Při zachování podmínky rovnováhy vzhledem k těžišti elementu platí:

$$|\sigma_{12}| = |\sigma_{21}| \quad |\sigma_{23}| = |\sigma_{32}| \quad |\sigma_{13}| = |\sigma_{31}| \quad (7.1)$$

a tedy pro určení napjatosti systému postačí 6 složek napětí z celkových 9.

Lineární vztah mezi napětím a deformací vyjadřuje Hookův zákon v obecném tvaru:

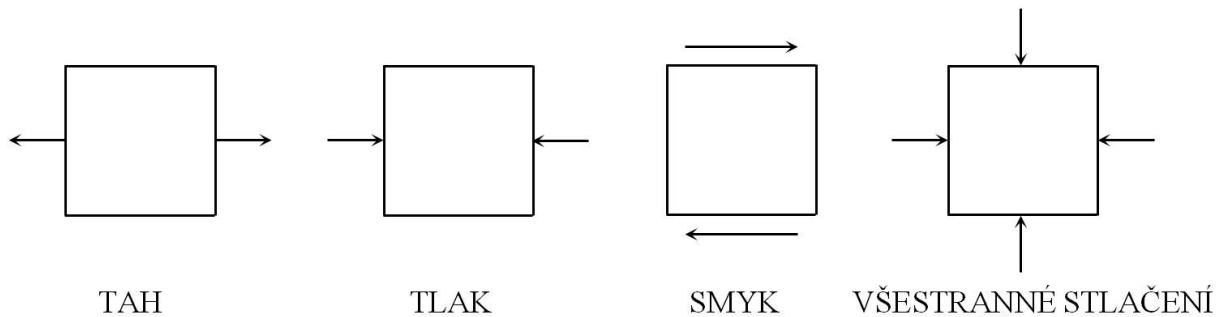
$$\sigma = k\varepsilon, \sigma \neq f(t) \quad (7.2)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1113} & C_{1123} & C_{1112} \\ C_{2211} & & & & & \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & \\ C_{1211} & & & & & C_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

Polymerní látky se deformují lineárně elasticky jen při velice nízkých hodnotách deformace.

## 7.1 Vymezení důležitých pojmů

Základní typy deformačního namáhání schematicky znázorňuje Obr. 7.2.



Obr. 7.2: Způsoby deformačního namáhání

Napěťový stav se často vyjadřuje pomocí invariant napětí a deformace, což jsou veličiny nezávislé na souřadném systému.

Vyjádříme-li poměrné deformace:

$$\lambda_1 = 1 + \varepsilon_{11} \qquad \lambda_2 = 1 + \varepsilon_{22} \qquad \lambda_3 = 1 + \varepsilon_{33} \quad (7.4)$$

Pro invarianty deformace platí:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (7.5)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (7.6)$$

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 \quad (7.7)$$

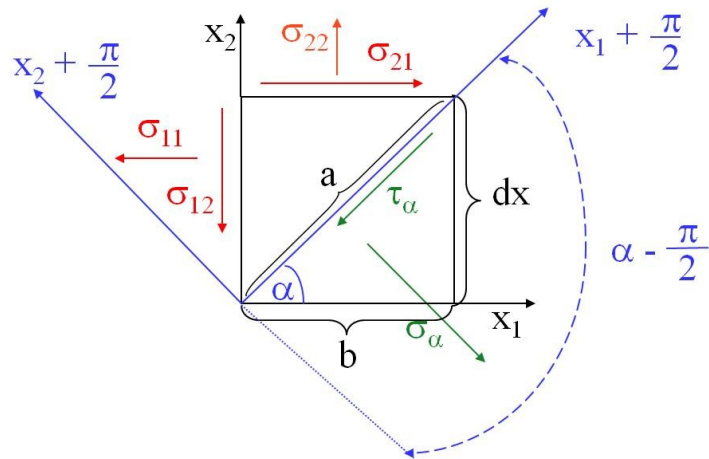
Invarianty napětí:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (7.8)$$

$$I_2 = \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11} \quad (7.9)$$

$$I_3 = -\sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 + \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} \quad (7.10)$$

Často je žádoucí určit, jak se složky napětí změní se změnou orientace souřadného systému. Zavedeme-li předpoklad, že složky napětí v jedné rovině jsou rovny nule, pak se napjatost systému zjednodušuje na dvojsou (rovinnou). Elementem vymezeným rozměry  $b$  a  $dx$  schematicky znázorněným na Obr. 7.3 vedeme řez pod úhlem  $\alpha$  (v našem případě  $45^\circ$ ). Smykové  $\tau_\alpha$  a normálové  $\sigma_\alpha$  napětí v řezu určíme z rovnice rovnováhy sil:



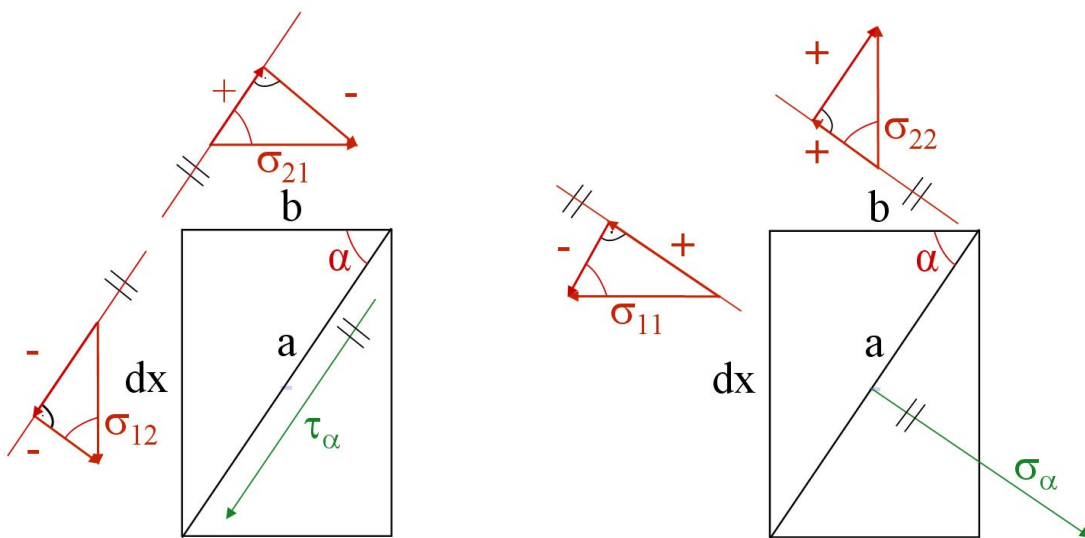
Obr. 7.3: Změna orientace souřadného systému

Pro bilanci sil nejprve vyjádříme:

$$F_{\alpha\tau} = \tau_{\alpha} a = \tau_{\alpha} \frac{dx}{\sin\alpha} \quad (7.11)$$

$$F_{\alpha\sigma} = \sigma_{\alpha} a = \sigma_{\alpha} \frac{dx}{\sin\alpha} \quad (7.12)$$

Pro přehlednost znázorníme rozklad smykových a normálových napětí odděleně (Obr. 7.4) a pouze pro jeden kvadrant:



Obr. 7.4: Rozložení smykových a normálových napětí

Výpočet  $\tau_{\alpha}$ :

$$-\sigma_{11} \cos\alpha \, dx + \sigma_{22} \sin\alpha \cdot b - \sigma_{12} \sin\alpha \, dx + \sigma_{21} \cos\alpha \cdot b - \tau_{\alpha} \frac{dx}{\sin\alpha} = 0 \quad (7.13)$$

$$\tau_{\alpha} = -1/2(\sigma_{11} - \sigma_{22})\sin 2\alpha + \sigma_{21} \cos 2\alpha \quad (7.14)$$

Výpočet  $\sigma_\alpha$ :

$$\sigma_{11} \sin \alpha \, dx + \sigma_{22} \cos \alpha \, b - \sigma_{12} \cos \alpha \, dx - \sigma_{21} \sin \alpha \, b - \sigma_\alpha \frac{dx}{\sin \alpha} = 0 \quad (7.15)$$

$$\sigma_\alpha = -\sigma_{12} \sin 2\alpha + \sigma_{11} \sin^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha \quad (7.16)$$

Výpočet  $\tau_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ :

$$\tau_{\alpha+\frac{\pi}{2}} = -\tau_\alpha \quad (7.17)$$

Vyjádření  $\sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$ :

$$\sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}} = \sigma_{12} \sin 2\alpha + \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha \quad (7.18)$$

Nyní budeme zjišťovat, zda existuje taková orientace souřadného systému, že smyková napětí vymizí:

$$\tau_{\alpha,m} = -\frac{1}{2} \sin 2\alpha (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \sigma_{12} \cos 2\alpha = 0 \quad (7.19)$$

po úpravě:

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \cot g \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \quad (7.20)$$

a normálová napětí dosáhnou extrémních hodnot:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\sigma_{12} \cos 2\alpha + 2\sigma_{11} \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2\sigma_{22} \cos \alpha (-\sin \alpha) = 0 \quad (7.21)$$

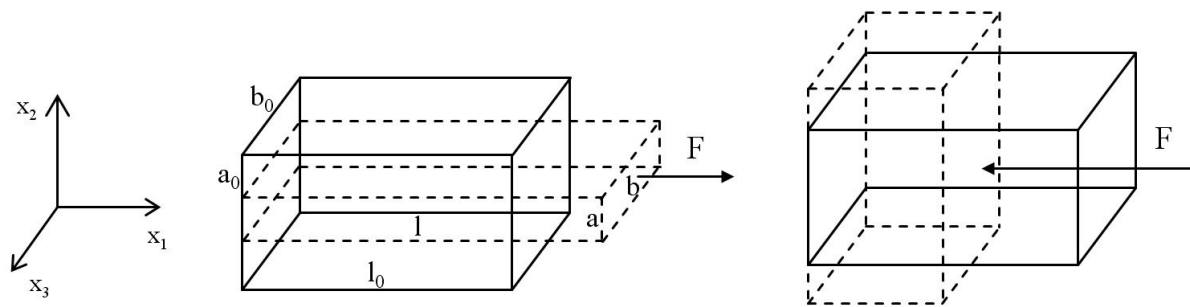
po derivaci a úpravě:

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \cot g \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \quad (7.22)$$

V soustavě existují 2 plochy pod úhlem  $\alpha_m$  a  $\alpha_m + \pi/2$ , kde jsou smyková napětí rovna nule a normálová napětí jsou extrémní. Tato napětí se pak označují jako hlavní  $\sigma_1, \sigma_2$ .

## 7.2 Vztah napětí-deformace pro jednosměrné protažení (stlačení)

Pro jednosměrné protažení/stlačení izotropního elementu znázorněném na Obr. 7.5 platí:



Obr. 7.5: Jednosměrné protažení (a) a stlačení (b) izotropního tělesa

Napětí ve směru osy protahování/stlačení:

$$\sigma_{11} = \sigma_0 \quad (7.23)$$

Napětí ve zbývajících směrech:

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 \quad (7.24)$$

Deformace pro jednosměrné *protahování*:

Deformace při jednosměrném *stlačení*:

$$\varepsilon_{11} = \frac{l - l_0}{l_0} \langle 0 \text{ podélné prodloužení } \varepsilon_{11} \langle 0 \quad (7.25)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{a - a_0}{a_0} \langle 0 \text{ boční zkrácení } \varepsilon_{22} \rangle 0 \quad (7.26)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{b - b_0}{b_0} \langle 0 \text{ boční zkrácení } \varepsilon_{33} \rangle 0 \quad (7.27)$$

Poměr bočního zkrácení a podélného prodloužení při jednosměrném tahovém namáhání se nazývá **Poissonův poměr**:

$$\nu = - \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \quad (7.28)$$

Poměrná změna objemu pro *malé* deformace:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (7.29)$$

Vztah mezi napětím a deformací vyjádříme Hookovým zákonem pro jednosměrné protažení/stlačení:

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \quad (7.30)$$

Konstantou úměrnosti mezi napětím a deformací pro namáhání na tah/tlak je **modul pružnosti v tahu** (*Youngův modul*)  $E$ .

Deformace v jednotlivých směrech vyjádříme:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} \quad (7.31)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11} = -\frac{\nu \sigma_{11}}{E} \quad (7.32)$$

Poměrnou změnu objemu lze následně vyjádřit:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{11} - 2\nu \varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}(1 - 2\nu) = \frac{\sigma_{11}}{E}(1 - 2\nu) \quad (7.33)$$

a Poissonův poměr zapsat:

$$\nu = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{V} \frac{dV}{d\varepsilon_{11}} \right) \quad (7.34)$$

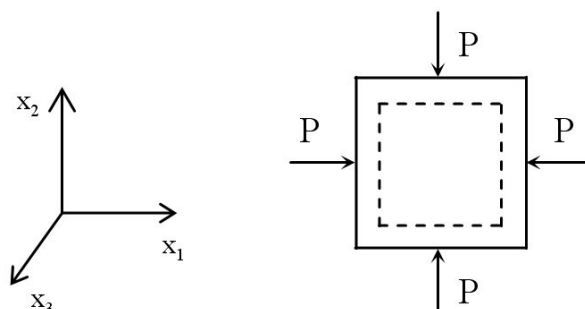
Hodnotě Poissonova poměru pro nestlačitelné látky ( $\nu = 0,5$ ) se nejvíce blíží pryž hodnotou 0,499; další příklady materiálů jsou zachyceny v Tab. 7.1.

Tab. 7.1: Hodnoty Poissonova poměru pro vybrané materiály

Materiál	$\nu$	Materiál	$\nu$
diamant	0,23	LDPE	0,4
ocel	0,28	PS	0,38
zlato	0,23	PMMA	0,33
voda	0,3	PA-66	0,44

### 7.3 Vztah napětí-deformace pro všestranné stlačení vlivem hydrostatického tlaku

Působení hydrostatického tlaku vyvolá všestranné stlačení tělesa, jak je schématicky znázorněno na Obr. 7.6.



Obr. 7.6: Schematické znázornění deformace elementu vlivem všestranného stlačení (působením hydrostatického tlaku)

Normálová napětí vyvolaná v jednotlivých směrech mají stejnou hodnotu:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -P \quad (7.35)$$

Vzniklé normálové deformace mají zápornou hodnotu:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} > 0 \quad (7.36)$$

Spojením vyjádření hydrostatického (negativního) tlaku:

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3 = -P \quad (7.37)$$

a vyjádření objemové změny:

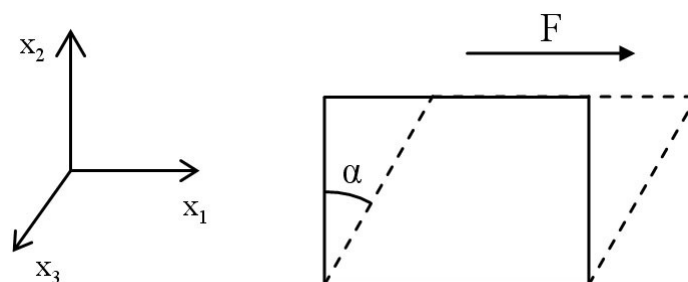
$$\Delta V/V = 3\varepsilon \quad (7.38)$$

získáme Hookův zákon ve tvaru:

$$P = -K(\Delta V/V) \quad (7.39)$$

kde  $K$  je **objemový modul pružnosti**.

## 7.4 Vztah napětí-deformace pro smykové namáhání



Obr. 7.7 Schematické vyjádření smykového namáhání

Smyková síla působící na element vyvolá napětí:

$$\sigma_{21} = \tau \quad (7.40)$$

a deformaci:  $\varepsilon_{21} = (\partial u_2 / \partial x_1 + \partial u_1 / \partial x_2) = \operatorname{tg} \alpha = \gamma \quad (7.41)$

Vztah mezi smykovým napětím a smykovou deformací vyjadřuje Hookův zákon ve tvaru:

$$\tau = G\gamma \quad (7.42)$$

kde  $G$  je **modul pružnosti ve smyku**.

## 7.5 Vztahy mezi moduly

Charakteristické elastické konstanty materiálu jsou Youngův modul pružnosti v tahu  $E$ , smykový modul pružnosti  $G$ , objemový modul pružnosti  $K$  a Poissonův poměr  $\nu$ . Při znalosti hodnoty jednoho modulu a Poissonova poměru lze další moduly vypočítat, protože mezi nimi existuje vzájemný vztah. K plné definici lineárního elastického deformačního chování izotropního tělesa při dané teplotě tedy stačí znát hodnoty dvou charakteristických konstant ze čtyř.

### 7.5.1 Vztah mezi modulem pružnosti v tahu $E$ a modulem objemové pružnosti $K$

Pro vyjádření vztahu mezi modulem pružnosti v tahu  $E$  a modulem objemové pružnosti  $K$  budeme kombinovat deformaci způsobenou tahem a všestranným stlačením.

Při všestranném stlačení jsou normálové složky napětí všechny stejně velké a vyrovnávající působení všestranného tlaku  $P$ .

Například složka napětí  $\sigma_{11}$  vyvolá deformace v jednotlivých směrech:

$$\varepsilon_{11} = \sigma_{11} / E = -P / E \quad (7.43)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\sigma_{11} \nu / E = P \nu / E \quad (7.44)$$

Deformace vzniklé účinkem dalších složek napětí ( $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ ) jsou stejné.

Zavedením předpokladu malých deformací platí:

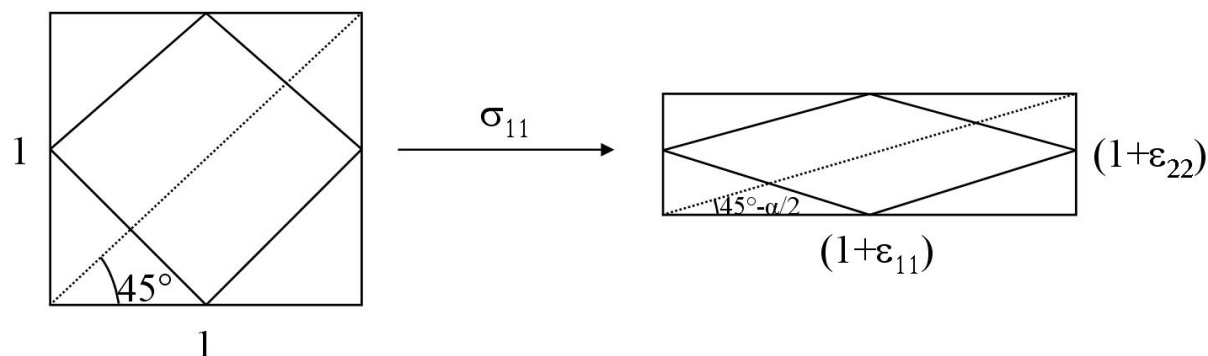
$$\Delta V / V = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3(-P / E + 2P \nu / E) = -3P / E(1 - 2\nu) \quad (7.45)$$

a spojením s vyjádřením Hookova zákona pro všestranné stlačení (7.39) získáme vztah mezi modulem pružnosti v tahu a modulem objemové pružnosti:

$$E = 3K(1 - 2\nu) \quad (7.46)$$

### 7.5.2 Vztah mezi modulem pružnosti v tahu $E$ a modulem pružnosti ve smyku $G$

Pro vyjádření vztahu mezi modulem pružnosti v tahu  $E$  a modulem pružnosti ve smyku  $G$  budeme kombinovat deformaci způsobenou tahem a smykem, jak je schématicky znázorněno na Obr. 7.8. K tomuto účelu nám poslouží modelová situace, kdy na objemový element o jednotkových rozměrech, do něhož je vepsán stejný element pootočený o úhel  $45^\circ$ , působí normálová síla  $F$ , vyvolávající napětí  $\sigma_{11}$ . Deformace, kterou vyvolá normálové napětí je schématicky znázorněna na Obr. 7.8.



Obr. 7.8: Schématické vyjádření vztahu mezi moduly  $E$  a  $G$

Deformaci elementu vyjádříme prostřednictvím deformace úhlu úhlopříčky elementu:



$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \varepsilon_{22}}{1 + \varepsilon_{11}} = (1 + \varepsilon_{22})(1 - \varepsilon_{11}) = 1 - \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = 1 - \varepsilon_{11} - \nu \varepsilon_{11} = 1 - [\varepsilon_{11}(1 + \nu)]$$

(7.47)

pro malé deformace zároveň platí:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha/2)} = \frac{1 - (\alpha/2)}{1 + (\alpha/2)} = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \alpha = 1 - \gamma \quad (7.48)$$

kde:

$\alpha$  – úhel zkosu vepsaného elementu

$\gamma$  – smyková deformace.

Porovnáním (7.47) a (7.48) získáme vyjádření deformace:

$$\gamma = \varepsilon_{11}(1 + \nu) \quad (7.49)$$

Dosazením za smykovou a normálovou deformaci dle Hookova zákona (smykové napětí působící na vepsaný element má poloviční hodnotu normálového napětí) pak získáme vztah mezi moduly:

$$E = 2G(1 + \nu) \quad (7.50)$$