

9 Viskoelastické modely

Polymerní materiály se chovají viskoelasticky, tj. pod vlivem mechanického namáhání reagují současně jako pevné hookovské látky i jako viskózní newtonské kapaliny. Viskoelastické materiály reagují na deformaci vždy se zpožděním.

Pro stanovení viskoelastické odezvy polymerního materiálu rozlišujeme dva základní typy experimentů:

relaxace napětí v polymeru s časem při konstantní deformaci a teplotě:

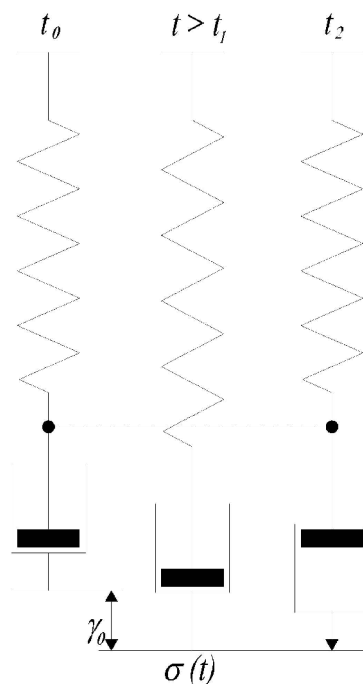
$$\sigma(t) = E(t) \cdot \varepsilon \quad (9.1)$$

kríp (tečení), kdy sledujeme změnu deformace polymeru v čase při konstantním napětí a teplotě:

$$\varepsilon(t) = D(t) \cdot \sigma \quad (9.2)$$

9.1 Maxwellův model

Relaxaci lineárního polymeru lze kvalitativně popsat pomocí *Maxwellova mechanického modelu* znázorněného na Obr.9.1, tvořeného ocelovou pružinou s modulem pružnosti E (elastická, hookeovská část) a pístem, ve kterém je kapalina s viskozitou η (viskózní, newtonská část). Tento model popisuje případ toku komplikovaného elasticitou.



Obr. 9.1: Maxwellův model

Před zatížením (čas t_0) jsou oba komponenty nedeformovány, v klidu. V čase t_1 , kdy model skokově zatížíme (zdeformujeme), pružina reaguje okamžitě a protahuje se až do rovnovážného stavu, kde setrvává. Zároveň se začne pohybovat píst. Po určité době oba prvky

vykazují stejnou deformaci úměrnou zatížení. Po uvolnění zatížení (t_2) se pružina vrací okamžitě a zcela do původního stavu, pístit zůstává zdeformovaný.

Po deformačním cyklu zůstává lineární polymer částečně zdeformován. Míra navrácení do původního, nedeformovaného stavu závisí na elastické části, zatímco nevratná deformace je úměrná viskózní části viskoelastického materiálu.

Celkové smykové napětí je shodné s napětími v obou částech:

$$\sigma = \sigma_s = \sigma_d \quad (9.3)$$

Celková deformace se rovná součtu jednotlivých deformací pružiny (spring - index s) a pístit (dashpot - index d):

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_s + \dot{\gamma}_d \quad (9.4)$$

Po dosazení:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\dot{\sigma}_s}{G} + \frac{\sigma_d}{\eta} \quad (9.5)$$

Po zavedení důležité viskoelastické veličiny – **relaxačního času** $\lambda = \eta/G$ získáme diferenciální rovnici vyjadřující deformaci tohoto modelu:

$$\frac{d\gamma}{dt} G = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\lambda} \quad (9.6)$$

V čase t_0 se model nachází v klidovém stavu - deformace nulová. V čase t_1 zavedeme skokově deformaci γ , která působí až do času t_2 , kdy přestává být polymerní materiál deformován (Obr. 9.2).

Pro relaxaci napětí viskoelastického materiálu jsou okrajové podmínky modelu následující:

v čase t_0 je $\sigma = 0$
 v čase t_1 je $\sigma = \sigma_0$,
 v čase t_1 až t_2 je $\sigma = \sigma(t)$

Po integraci vztahu (9.6) a dosazení okrajových podmínek získáme rovnici Maxwellova modelu:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{t}{\lambda}} \quad (9.7)$$

Průběh napěťové odezvy (**relaxace napětí**) se tedy nachází mezi dvěma mezními případy: relaxační křivkou ideálně elastické pevné látky a relaxační křivkou ideálně viskózní tekutiny. Relaxační čas vyjadřuje poměr mezi viskózní a elastickou částí.

$$\text{V čase } t = 0: \quad \sigma(0) = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{t}{\lambda}} = \gamma_0 \cdot G e^0 = \gamma_0 \cdot G = \sigma_{max} \quad (9.8)$$

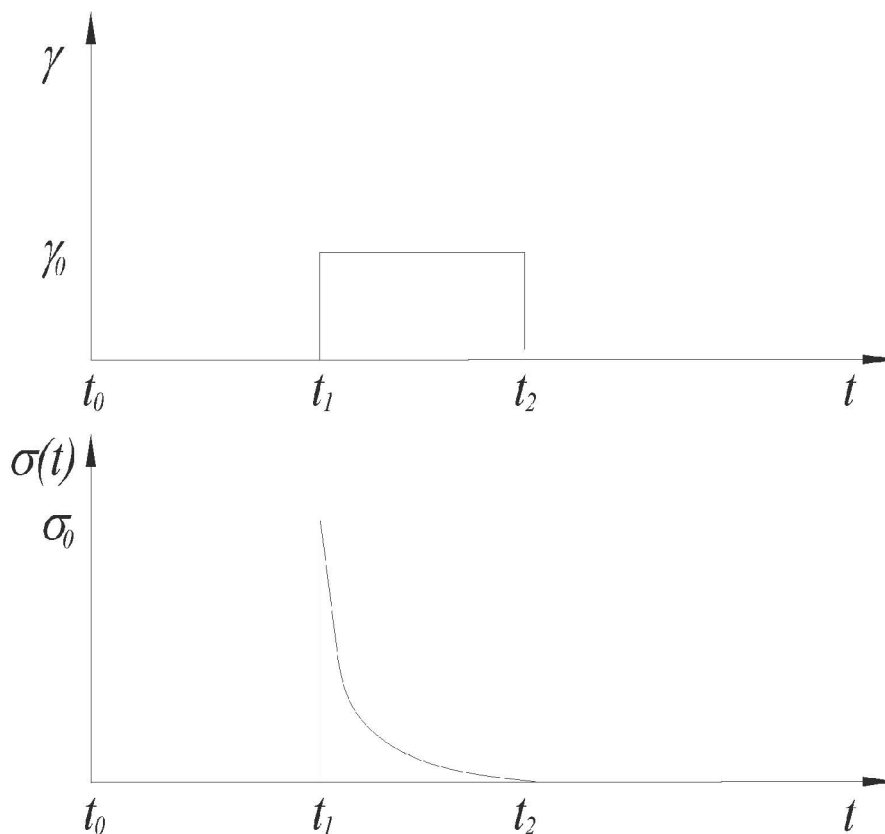
tj. maximálního napětí je dosaženo v okamžiku zatížení,

$$\text{v čase } t = \infty: \quad \sigma(\infty) = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{t}{\lambda}} = \gamma_0 \cdot G \cdot 0 = 0 \quad (9.9)$$

tedy za nekonečně dlouhou dobu po ukončení působení deformace systém dokonale zrelaxuje a hodnota napětí je rovna nule,

$$\text{v čase } t = \lambda \quad \sigma(\lambda) = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{t}{\lambda}} = \gamma_0 \cdot G \cdot e^{-1} = \gamma_0 \cdot G \cdot 0,368 \quad (9.10)$$

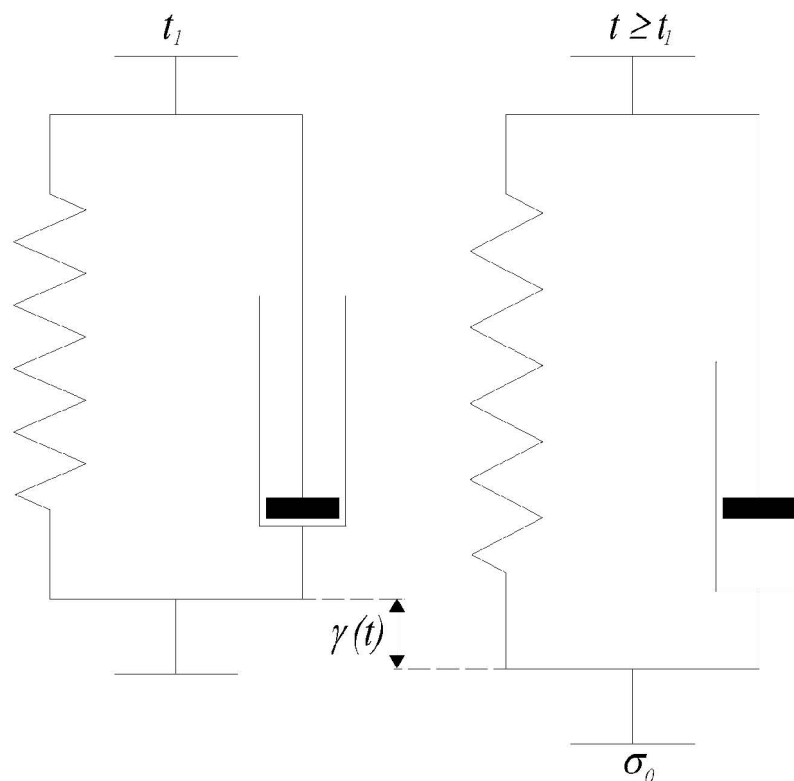
tj. v čase, který je roven relaxačnímu času, materiál zrelaxuje na 36,8 % maximálního napětí.



Obr. 9.2: Napěťová odezva viskoelastické látky při relaxačním testu

9.2 Kelvinův model

Kelvinův model představuje paralelní spojení pístu a pružiny (Obr. 9.3), kdy přechod pružiny z nedeformovaného stavu do deformovaného je brzděn pístem. Brzděná konformační elasticita je u polymerů nejvýznamnější deformační děj.



Obr. 9.3: Kelvinův model

Deformace obou prvků je stejná:

$$\gamma = \gamma_s = \gamma_d \quad (9.11)$$

Napětí se rovná součtu napětí v pružině a pístu:

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_d = G \cdot \gamma + \eta \cdot \dot{\gamma} \quad (9.12)$$

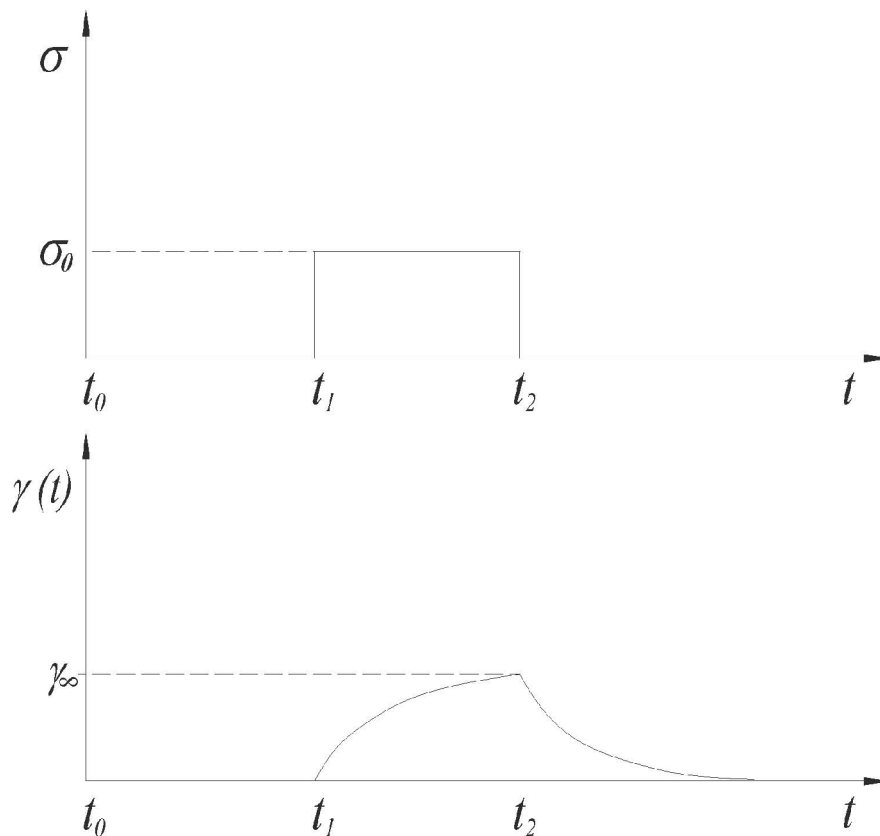
Diferenciální rovnice tohoto modelu má tvar:

$$G \cdot \gamma + \eta \cdot \frac{d\gamma}{dt} = \sigma \quad (9.13)$$

V čase t_0 se model nachází v klidovém stavu - deformace nulová. V čase t_1 zavedeme skokově napětí σ_0 , které působí až do času t_2 (Obr. 9.4).

Pro křípový experiment jsou okrajové podmínky modelu následující:

- v čase t_0 je $\gamma = 0$
- v čase t_1 až t_2 je $\gamma = \gamma(t)$
- v čase je t_2 je $\gamma = \gamma_\infty$



Obr. 9.4: Deformační odezva viskoelastické látky při kríčovém testu

Po integraci vztahu (9.13) a dosazení okrajových podmínek získáme rovnici Kelvinova modelu:

$$\gamma(t) = \gamma_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \right) \quad (9.14)$$

kde:

λ – je relaxační čas určující rychlost přechodu z nedeformovaného vztahu do deformovaného;
za relaxační čas dosáhne Kelvinův model 63,2 % rovnovážné deformace

γ_{∞} - limitní (rovnovážná) hodnota deformace daná pouze vlastnostmi pružiny ($\gamma_{\infty} = \tau_0/G$).

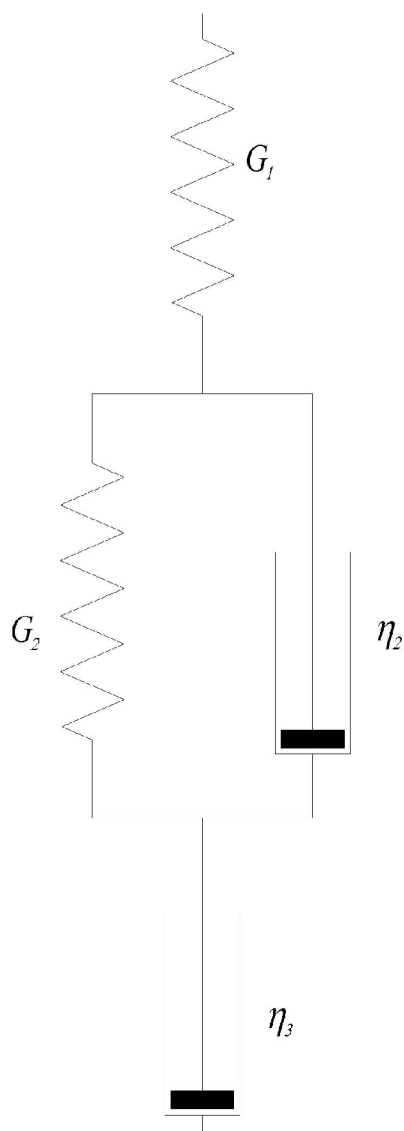
Zpětný kríp (elastické zotavení) nastává v čase t_2 , kdy přestane působit deformační síla vyvolávající napětí, tj. v čase t_2 je napětí rovno 0 a deformace odpovídá limitní (rovnovážné) hodnotě γ_{∞} . Nyní nás zajímá další vývoj deformace v čase delším než t_2 :

$$\gamma(t) = \gamma_{\infty} \left(e^{-\frac{t}{\lambda}} \right) \quad (9.15)$$

Rychlost poklesu deformace je opět určena relaxačním časem.

9.3 Tucketův model

Tucketův model (Obr. 9.5) může být použit pro popis deformačního chování lineárního amorfního polymerního materiálu.



Obr. 9.5: Tucketův model

Jedná se o tříparametrový model, kde jednotlivým parametrům lze přisoudit 3 deformační mechanismy lineárního amorfního polymeru:

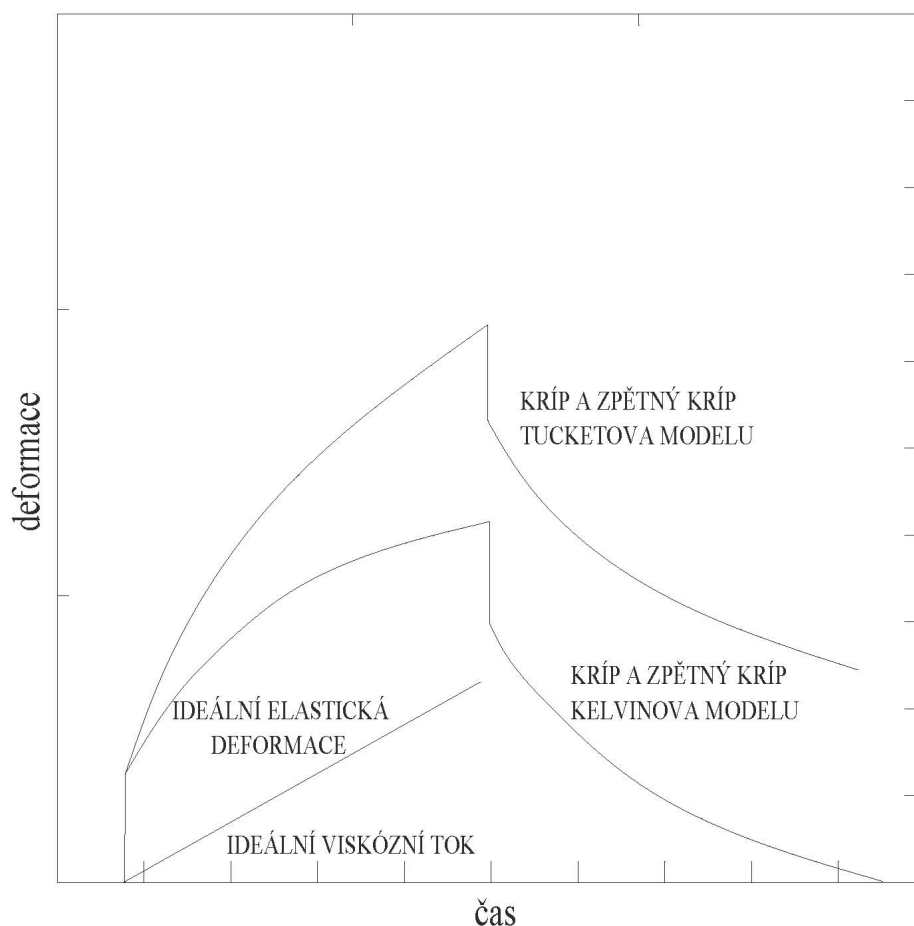
pružina reprezentuje ideálně elastickou deformaci valenčních úhlů, vazeb a mezimolekulových vzdáleností,

Kelvinův model představuje zpožděnou elastickou deformaci polymerních klubek, píst koresponduje s nevratným přesunem klubek (tok).

Za předpokladu aditivní deformace lze deformační odezvu při kríčovém experimentu vyjádřit vztahem:

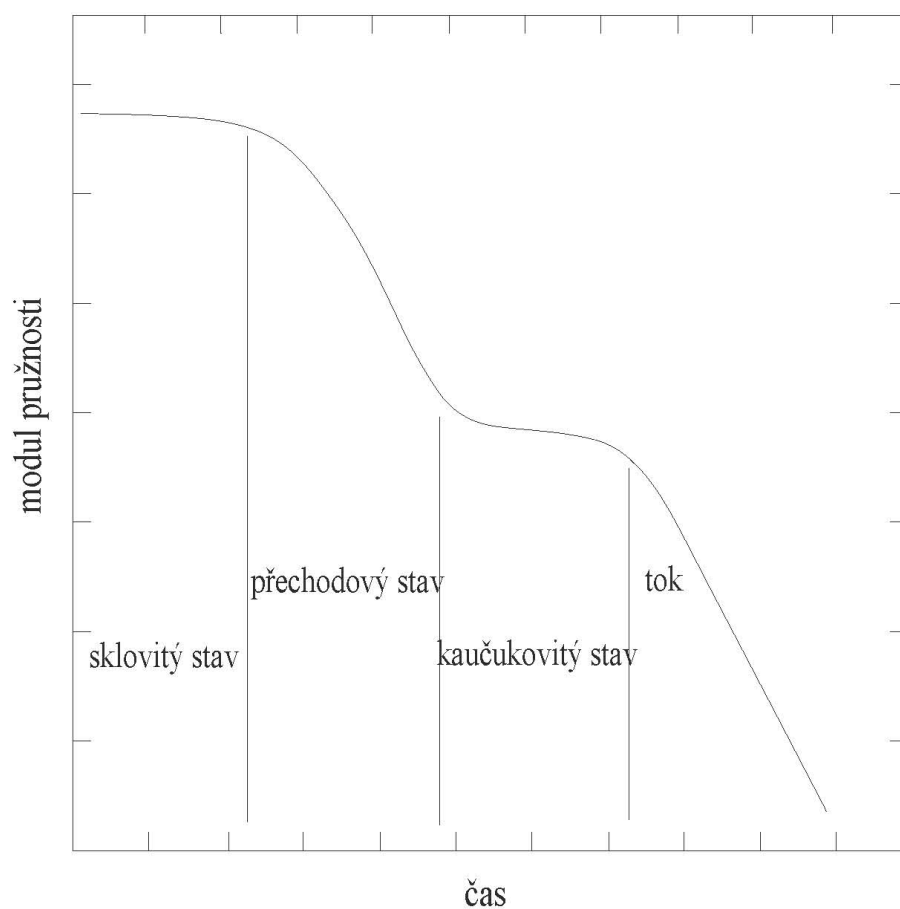
$$\gamma(t) = \sigma_0 \left[\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} (1 - e^{-t/\lambda}) + \frac{1}{\eta_3} t \right] \quad (9.16)$$

Deformační odezva se skládá z odezev ideálně elastické látky, viskoelastické deformace Kelvinova modelu a ideální viskózní kapaliny, jak znázorňuje schematicky Obr. 9.6.



Obr. 9.6: Kríp a zpětný kríp Tucketova modelu deformačního chování lineární amorfni polymerní látky

Průběh tzv. kríového modulu pružnosti vyjádřeného poměrem konstantního napětí a časově závislé deformace zobrazuje Obr. 9.7.



Obr. 9.7: Časově závislý modul pružnosti Tucketova modelu deformačního chování