Pohyb soustavy hmotných bodů

Tato kapitola se zabývá úlohami, kdy není možné těleso nahradit jedním hmotným bodem, především při otáčení tělesa.

Těžiště soustavy hmotných bodů a tělesa

Při hodu nějakým složitějším tělesem, například nožem nebo sekerou, nelze pohyb tělesa popsat jako pohyb hmotného bodu. Pro cíl hodu je pak důležité, jestli byl zasažen rukojetí nebo ostřím. Při pohybu takového tělesa dochází k jeho rotaci a každý bod tělesa se pohybuje po jiné dráze jinou rychlostí. Při sledování pohybu takového tělesa lze nalézt bod, který se pohybuje po parabolické dráze jako při šikmém vrhu. Tento význačný bod nazýváme **střed hmotnosti** nebo **těžiště**.

Těžiště tělesa nebo soustavy těles je bod, který se pohybuje tak, jako by v něm byla soustředěna veškerá hmota tělesa (soustavy) a působily v něm všechny vnější síly působící na těleso (soustavu).

Těžiště je takový bod, kdy působení gravitační síly na něj má stejný účinek jako působení na celé těleso. Má-li být těleso podepřeno (nebo zavěšeno) v jednom bodě tak, aby gravitační síla byla vyrovnána, pak svislá těžnice musí procházet bodem podepření (nebo závěsu).

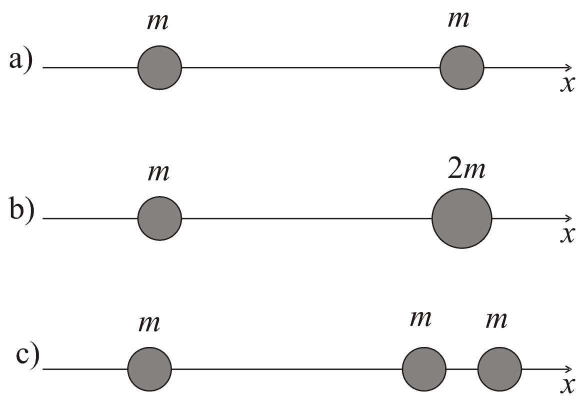
Určování těžiště geometricky

Pokud je těleso homogenní, má všude stejnou hustotu a má:
- střed souměrnosti, pak těžiště leží v něm.
- osu souměrnosti, pak těžiště leží na ní.
- rovinu souměrnosti, pak těžiště je v této rovině.

Určování těžiště experimentálně

Při volném zavěšení tělesa v jednom bodě leží těžiště na těžnici – přímce jdoucí z bodu závěsu svisle dolů. Jinými slovy, těžiště leží pod bodem závěsu.

Určování těžiště výpočtem



Obr. 5.1: Těžiště soustavy hmotných bodů

Dva stejné hmotné body leží na ose x (obr. 5.1a). Lze očekávat, že střed hmotnosti bude uprostřed mezi hmotnými body

$$x_T = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Je-li jeden z hmotných bodů těžší (obr. 5.1b), lze očekávat, že střed hmotnosti bude opět na jejich spojnici, tím blíž těžšímu bodu, čím je tento těžší než druhý

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} .$$

Je-li hmotných bodů na ose x víc, pak

$$x_T = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} .$$

Nenachází-li se hmotné body na ose, lze výpočet středu hmotnosti takové soustavy zobecnit

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum m_i \boldsymbol{r}_i , \tag{5.1}$$

kde M je hmotnost celé soustavy.

Nejedná-li se o soustavu hmotných bodů, ale o spojité těleso, lze ho rozřezat na elementární tělíska (body) o hmotnosti dm a sečíst jako v (5.1). Sumu pak nahradí integrál

$$x_T = \frac{\int \boldsymbol{r} \mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{1}{m} \int \boldsymbol{r} \mathrm{d}m . \tag{5.2}$$

Těžiště může ležet i mimo těleso (například v jeho dutině).

Jestliže spojíme dvě tělesa v jedno, bude jeho těžiště ležet uvnitř úsečky spojující těžiště obou částí.

2. Newtonův zákon pro soustavu hmotných bodů

Druhý Newtonův zákon (3.1) popisuje vztah mezi zrychlením tělesa a výslednicí sil, které na těleso působí. Pokud lze těleso aproximovat hmotným bodem, nebývá sil, které musíme brát při výpočtu v úvahu, mnoho. Horší situace nastane, budeme-li popisovat třeba výše zmíněnou letící sekeru a uvědomíme-li si, že každý její atom působí nějakými silami na své sousedy. Pak najednou máme 10^{24} sil a stojíme před úkolem spočítat výslednici. V této kapitole se pokusíme najít nějaká zjednodušení.

Přepišme vztah (5.1) do tvaru

$$M\boldsymbol{r}_T = \Sigma m_i \boldsymbol{r}_i,$$

derivujme rovnici dvakrát podle času

$$M \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_T}{\mathrm{d}t^2} = \sum m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} .$$

Druhá derivace polohového vektoru podle času je zrychlení

$$M\boldsymbol{a}_T = \sum_i m_i \boldsymbol{a}_i . \tag{5.3}$$

Zrychlení i-tého bodu je podle (3.1) závislé na výslednici všech sil, které na tento bod působí

$$m\boldsymbol{a}_i = \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} , \tag{5.4}$$

Kde $\boldsymbol{F}_{ij}$ jsou všechny síly, které působí na i-tý bod.

Dosadíme-li (5.4) do (5.3) dostaneme

$$M\boldsymbol{a}_T = \sum_{ij} \boldsymbol{F}_{ij} = \sum \boldsymbol{F}_{vně} . \tag{5.5}$$

Klíčová je úprava, kdy suma úplně všech sil, které působí na úplně všechny body soustavy, byla nahrazena sumou vnějších sil. Tato úprava je možná proto, že působí-li i-tý bod na k-tý nějakou silou, podle zákona akce a reakce působí k-tý bod na i-tý silou stejně velkou, opačně orientovanou. To znamená, že každá taková vnitřní síla je v součtu započítána dvakrát. Jednou jako akce a podruhé s opačným znaménkem jako reakce. Vnitřní síly se v součtu vyruší a zůstanou pouze vnější síly. Na základě (5.5) lze zformulovat tvrzení:

Vnitřní síly nemohou nijak ovlivnit pohyb těžiště soustavy.

Zákon zachování hybnosti

Hybnost hmotného bodu je definována vztahem (3.3). Hybnost soustavy hmotných bodů definujeme jako součet hybností všech bodů soustavy

$$\boldsymbol{P} = \Sigma \boldsymbol{p}_i = \Sigma m_i \boldsymbol{v}_i. \tag{5.6}$$

Po derivaci (5.6) podle času a s uvážením (3.4) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum m_i \boldsymbol{a}_i = \sum \boldsymbol{F}_{vně} . \tag{5.7}$$

Podle (5.7) je změna hybnosti soustavy dána výslednicí vnějších sil působících na soustavu. Vnitřní síly tedy nemohou změnit hybnost soustavy.

Zákon zachování hybnosti: Je-li součet vnějších sil působících na soustavu nulový, hybnost soustavy se zachovává.

Ráz těles

Při srážkách (rázech) těles dochází pouze k vzájemnému působení těchto těles a vnější působení je možno zanedbat. Proto všechny síly, které na tělesa při srážce působí, jsou vnitřní síly, součet vnějších sil je nulový a podle (5.7) se hybnost soustavy při rázech zachovává. Rozlišujeme dva extrémní případy – ráz dokonale pružný a ráz dokonale nepružný. V praxi jde vždy o situaci někde mezi těmito extrémy a reálná srážka zpravidla není ani dokonale pružná ani dokonale nepružná. Vadou reálných situací je, že se obtížně počítají. Proto se vždy snažíme reálnou situaci aproximovat některým z ideálních případů.

Ráz dokonale pružný

Při dokonale pružném rázu nedochází k trvalé deformaci těles, to znamená, že se žádná mechanická energie nepřemění na teplo a platí kromě zákona zachování hybnosti i zákon zachování energie. Ze zákona zachování energie plyne rovnice

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \tag{5.8}$$

a ze zákona zachování hybnosti pak

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = m_1 \boldsymbol{v}_1' + m_2 \boldsymbol{v}_2' . \tag{5.9}$$

Indexy 1 a 2 se vztahují k jednomu a druhému tělesu, nečárkované jsou rychlosti před srážkou, čárkované po srážce.
Připomeňme, že rovnice (5.9) je vektorová a jsou v ní tak skryty jedna, dvě nebo tři rovnice pro jednotlivé složky podle toho, zda řešíme problém na přímce, v rovině nebo v prostoru.

Ráz dokonale nepružný

Při dokonale nepružném rázu zůstávají tělesa po srážce spojena. Dochází k trvalé deformaci těles to znamená, že se část mechanické energie přemění na teplo a zákon zachování mechanické energie neplatí (zákon zachování energie samozřejmě platí vždy).

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Protože jsou tělesa po srážce spojena, mají společnou rychlost ***v'*** a zákon zachování hybnosti pak můžeme napsat

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}' .$$

Energie rotující soustavy, moment setrvačnosti

Předpokládejme soustavu hmotných bodů (těleso), která rotuje kolem nějaké osy *o*. Vzhledem k tomu, že jednotlivé body soustavy se pohybují, má soustava kinetickou energii. Kinetická energie soustavy je součtem kinetických energii všech hmotných bodů

$$W_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 . \tag{5.10}$$

Jelikož soustava hmotných bodů rotuje, má každý z hmotných bodů jinou rychlost v závislosti na vzdálenosti od osy rotace. To znamená, že vypočítat tímto způsobem kinetickou energii je prakticky nemožné. Všechny hmotné body ale mají stejnou úhlovou rychlost ω. Dosaďme podle (2.13) $v_i = \omega r_i$

$$W_k = \frac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2 . \tag{5.11}$$

Závorka ve vztahu (5.11) je charakteristikou soustavy hmotných bodů, která se pro danou soustavu a osu rotace nemění. Označme tento součet J a nazvěme ho **moment setrvačnosti**:

$$J = \sum m_i r_i^2 . \tag{5.12}$$

Pokud máme místo soustavy hmotných bodů spojité těleso, lze moment setrvačnosti spočítat pomocí vztahu

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m . \tag{5.13}$$

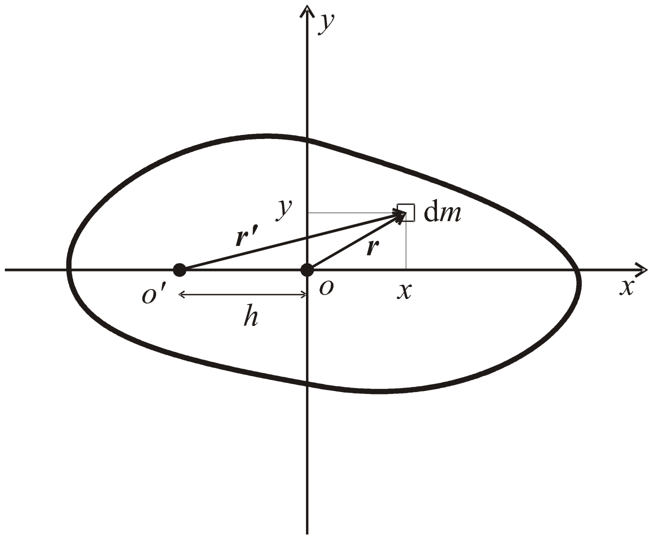
Kinetickou energii pak lze napsat jako

$$W_k = \frac{1}{2} J \omega^2 . \tag{5.14}$$

Všimněme si, že při přechodu od translačního k rotačnímu pohybu, vypadá vzorec (5.14) podobně jako (4.6) s tím, že místo m je J a místo v pak ω. Moment setrvačnosti má při rotačním pohybu stejný význam jako hmotnost pro translační pohyb. Obě veličiny vyjadřují setrvačné vlastnosti tělesa.

Steinerova věta

Vzhledem k tomu, že moment setrvačnosti má stejný význam jako hmotnost, je to při studiu rotačního pohybu velmi důležitá veličina. Steinerova věta je nástrojem, jak vypočítat moment setrvačnosti k nějaké ose, známe-li již moment setrvačnosti k jiné (s novou rovnoběžné) ose. Mějme těleso ve tvaru desky zobrazené na obr. 5.2.



Obr. 5.2: Steinerova věta

Osy x a y leží v rovině desky. Počátek je zvolen v těžišti tělesa. Osa o je kolmá k rovině desky a prochází těžištěm (počátkem). Osa o' je rovnoběžná s osou o. Vzdálenost mezi o a o' je h. Moment setrvačnosti vzhledem k ose o' je J.

$$J = \int r'^2 dm = \int ((x+h)^2 + y^2) dm = \int (x^2 + 2.h.x + h^2 + y^2) dm =$$

$$= \int (x^2 + y^2) dm + \int 2.x.h dm + \int h^2 dm = J_0 + x_T + mh^2$$

J je nyní součtem tří členů:

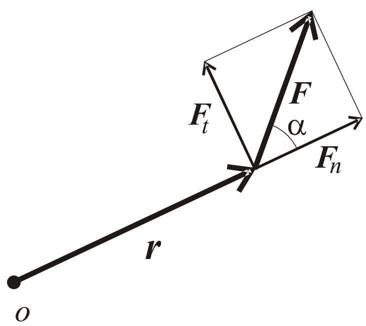
1. $\int(x^2+y^2)\mathrm{d}m = \int r^2 \mathrm{d}m = J_0$ – podle (5.13) moment setrvačnosti vzhledem k ose o procházející těžištěm.
2. $\int x\mathrm{d}m = mx_T$ – podle (5.2) x-souřadnice těžiště, ale těžiště je v počátku, tedy $x_T = 0$.
3. $\int h^2\mathrm{d}m = h^2\int \mathrm{d}m = mh^2$

Steinerova věta je vyjádřena rovnicí

$$J = J_0 + mh^2. \tag{5.15}$$

Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k libovolně zvolené ose o' je součtem J_0 (moment setrvačnosti vzhledem k ose o, která je rovnoběžná s o' a prochází těžištěm) a součinu mh^2, kde h je vzdálenost osy o' od těžiště.

Moment síly



Obr. 5.3: Moment síly

Při otáčení nějakého tělesa (například otevírání dveří) účinek síly závisí nejen na vzdálenosti od osy rotace (tlačit na dveře blízko pantů není úplně dobrý nápad), ale i na směru síly (síla působící ve směru $\boldsymbol{F}_n$ na obr. 5.3 může dveře vytrhnout z pantů, ale neotočí jimi). Lze očekávat, že otáčivý účinek síly bude úměrný délce **ramene síly** $\boldsymbol{r}$ a složce síly kolmé k rameni – $\boldsymbol{F}_t = F.\sin\alpha$.

Moment síly je vektorová fyzikální veličina, která vyjadřuje otáčivý účinek síly.

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{5.16}$$

Moment síly je vektorovým součinem ramene a síly. Připomeňme, že u vektorového součinu záleží na pořadí činitelů (nelze tedy místo $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ napsat $\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{r}$). $\boldsymbol{M}$ je vektor kolmý na rovinu definovanou vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$. Směr vektoru $\boldsymbol{M}$ určuje pravidlo pravé ruky: Zahnuté prsty pravé ruky ukazují směr otáčení tělesa, vztyčený palec ukazuje směr momentu síly.

Moment hybnosti

Moment hybnosti je vektorová fyzikální veličina, která popisuje rotační pohyb tělesa.

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{5.17}$$

2. impulsová věta

Pokusme se najít vztah mezi momentem síly a momentem hybnosti:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} \tag{5.18}$$

Analogicky ke vztahu (3.4), který nazýváme 1. impulsová věta, vztah (5.18) nazveme ***2. impulsová věta***.

Srovnání vztahů pro translační a rotační pohyby:

	translace	rotace
poloha	$\boldsymbol{r}$	φ
rychlost	$\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$	$\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$
zrychlení	$\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$	$\varepsilon = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$
setrvačnost	m	J
síla	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
hybnost	$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$
impulsová věta	$\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$, $\boldsymbol{F} = m.\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{M} = \mathrm{d}\boldsymbol{b}/\mathrm{d}t$, $M = J.\varepsilon$
kinetická energie	$W_k = ½.m.v^2$	$W_k = ½.J.\omega^2$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ