

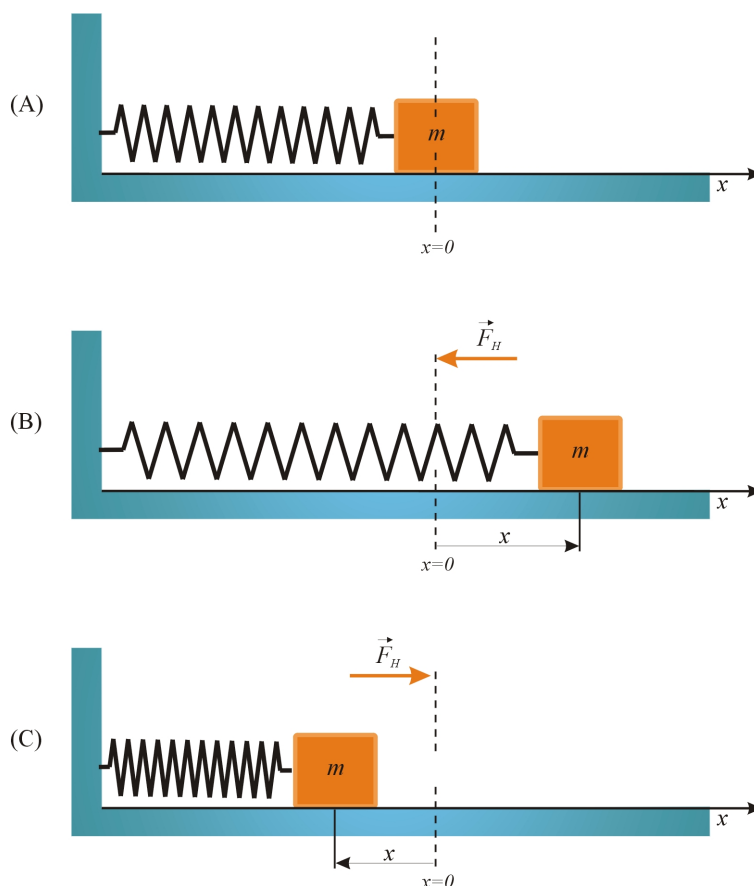
2 Kmity

2.1 Úvod

Kmitání stejně jako vlnění patří k typickým nestacionárním dějům s převážně periodickým průběhem. Veličiny, kterými kmitání popisujeme, se tedy s časem mění, ale mají také opakující se charakter. V této kapitole se budeme zabývat pouze klasickými kmity mechanickými a elektromagnetickými. Přestože mají tyto dva druhy kmitání zcela různou fyzikální podstatu, jsou zařazeny do jedné společné kapitoly, protože jejich matematický popis je naopak totožný.

2.2 Kmity tělesa na pružině, harmonický pohyb

Pro příklad jednoduchého harmonického kmitání si představme, že máme těleso o hmotnosti m pevně spojené s („nehmotnou“) pružinou, která je na druhém konci upevněna na nepohyblivé desce (viz [obr. 2.2.1](#)). Polohu tělesa, při které pružina není stlačená ani natažená, nazveme **rovnovážnou polohou** (na x -ové ose je $x = 0$). Pro jednoduchost ještě předpokládejme, že tření mezi podložkou a tělesem m je nulové (jedná se tedy o **netlumené kmity**).



Obrázek 2.2.1: Kmity tělesa na pružině. (A) Těleso je v rovnovážné poloze. (B), resp. (C) Těleso je vychýleno z rovnovážné polohy a vratným impulsem je zde síla podle Hookova zákona.

Výchylka tělesa ve směru osy x (resp. proti ose x) a směr síly pružiny jsou vždy opačné.

Síla, kterou pružina působí na vychýlené těleso a která jej vrací zpět do rovnovážné polohy, je odvozena z **Hookova zákona**:

$$F_H = -kx \quad . \quad (2.1)$$

Jinak řečeno je tato síla přímo úměrná (k) výchylce (x) tělesa na pružině. Konstanta k je nazývána **tuhostí pružiny**. Aplikujeme-li **II. Newtonův zákon** o síle musí platit následující rovnice:

$$\begin{aligned} -kx &= ma_x \quad , \\ a_x + \frac{k}{m}x &= 0 \quad , \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (2.2)$$

kde k/m nahradíme symbolem ω^2 (jeho matematicko-fyzikální význam vysvětlíme později). Dostaneme tedy následující pohybovou rovnici pro popis **netlumených kmitů** na pružině:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \quad . \quad (2.3)$$

Rovnice 2.3 je z matematického hlediska diferenciální rovnicí druhého řádu a její řešení najdeme ve tvaru:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad , \quad (2.4)$$

kde A je **amplituda** (resp. maximální výchylka oscilujícího tělesa), ω má význam **vlastní úhlové frekvence periodického pohybu** (kmity jsou periodickým dějem) a má tedy jednotky rad.s^{-1} , φ je počáteční úhel nebo-li **počáteční fáze**, tzn. sinus tohoto úhlu je vlastně počáteční výchylkou tělesa.

Z rovnice 2.4 můžeme vyjádřit okamžitou rychlost a zrychlení kmitavého pohybu (všimněme si, že rovnice 2.3 a 2.6 jsou totožné):

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A \frac{d}{dt} \sin(\omega t + \varphi) = A \omega \cos(\omega t + \varphi) \quad , \quad (2.5)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = A\omega \frac{d}{dt} \cos(\omega t + \varphi) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.6)$$

Další velmi důležitá veličina je **vlastní frekvence oscilátoru** ω , jejíž souvislost s tuhostí pružiny a hmotností závaží je zřejmý z rovnic [2.2](#) a [2.3](#):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.7)$$

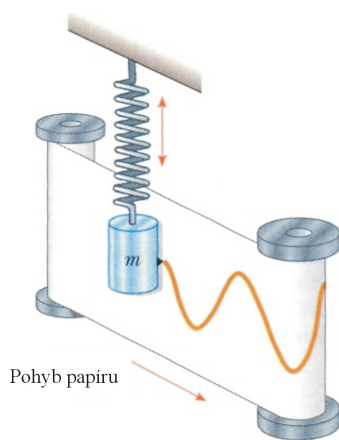
V rovnicích [2.5](#) a [2.6](#) si také povšimněme, že maximální hodnoty dosahuje rychlost při $\cos(0)$, ale zrychlení je naopak v tomto okamžiku nulové ($\sin(0)$). S použitím vztahu [2.7](#) tedy platí:

$$v_{max} = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{a} \quad a_{max} = A\omega^2 = A\frac{k}{m} \quad .$$

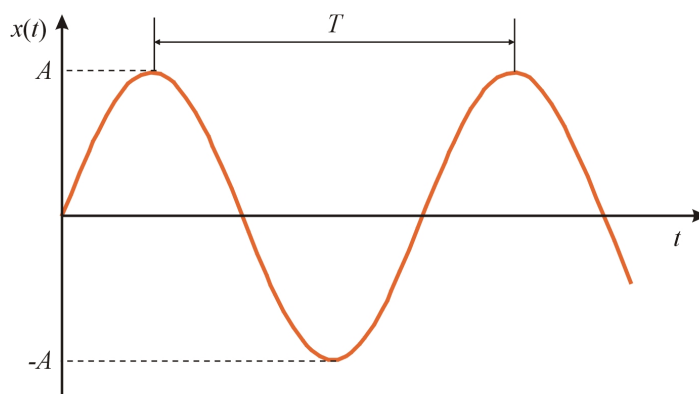
Na [obrázku 2.2.2](#) je vidět časová závislost okamžité výchylky, přičemž periodu kmitů a jejich frekvenci odvodíme snadno ze znalosti vztahu pro úhlovou rychlost, se kterou jsme se již setkali v kinematice kruhového pohybu:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad , \quad (2.8)$$

$$f = \frac{1}{T} \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.9)$$



(a)



(b)

Obrázek 2.2.2: (a) Zápis kmitání tělesa na papír pohybující se konstantní rychlostí (převzato z [1]), (b) Závislost okamžité výchylky na čase, A - amplituda, T - perioda kmitů

2.3 Energie jednoduchého harmonického oscilátoru

V mechanice byl diskutován zákon zachování mechanické energie v poli konzervativních sil. Pro případ jednoduchého harmonického oscilátoru, kdy neuvažujeme tření ani žádné jiné energetické ztráty, samozřejmě platí tento zákon také. Celková **energie harmonického oscilátoru** se také skládá z potenciální a kinetické energie, jejichž součet je konstantní:

$$E = E_k + E_p, \quad (2.10)$$

kde E_k je kinetická energie a E_p energie potenciální.

Potenciální energie harmonického oscilátoru souvisí pouze s pružinou a její velikost je závislá na tom, o kolik je pružina protažena či stlačena. Jinak řečeno je potenciální energie funkcí výchylky $x(t)$ a s použitím rovnice pro sílu [2.1](#) platí:

$$E_p = \int F dx = \int kx(t) dx, \quad \text{tedy}$$

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2(t) = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi). \quad (2.11)$$

Kinetická energie harmonického oscilátoru naopak zase souvisí jen s kmitajícím tělesem a její velikost se mění v závislosti na rychlosti $v(t)$. S použitím vzorce [2.5](#) dostáváme:

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi),$$

s použitím $\omega = k/m$

$$E_k = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi). \quad (2.12)$$

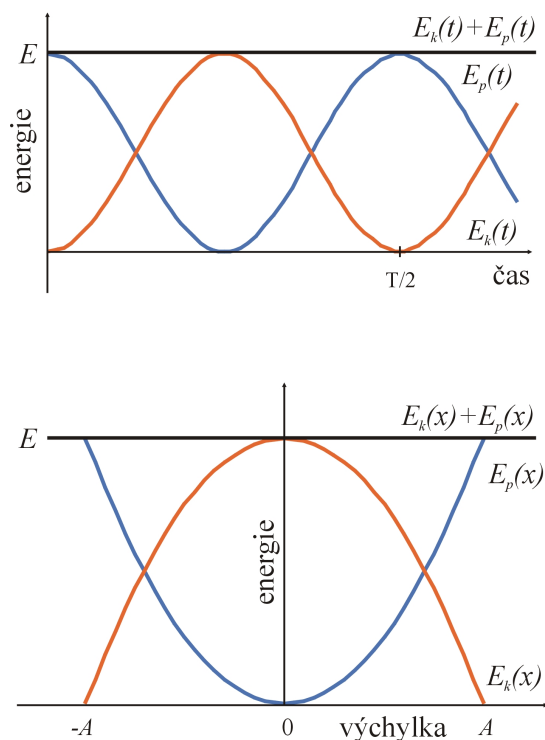
Celková energie je součtem obou energií podle [2.10](#):

$$E = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi),$$

použijeme – li $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, dostaneme:

$$E = \frac{1}{2} kA^2. \quad (2.13)$$

Jak vidíme ze vztahu [2.13](#), je energie opravdu nezávislá na čase a tedy konstantní. Na [obrázku 2.3.1](#) jsou graficky vyjádřeny potenciální a kinetická energie jako funkce času a výchylky. Povšimněme si, že všechny energie jsou nezáporné. Zároveň je také na obrázku vidět, že při nulové výchylce je veškerá energie oscilátoru tvořena pouze energií kinetickou a pro $x=\pm A$ naopak pouze energií potenciální.



Obrázek 2.3.1: Závislost potenciální a kinetické energie na čase a okamžité výchylce.

2.4 Kyvadla

V předchozí podkapitole 2.2 jsme se zabývali kmity tělesa na pružině a nyní si rozebereme harmonické oscilátory, u nichž není vratná síla spojena s tuhostí pružiny nebo elastického vlákna, ale s gravitační silou. Matematický popis kmitů kyvadel v podobě řešení diferenciální rovnice je v podstatě totožný jako v podkapitole 2.2, používají se pouze jiná písmena, a tudíž se rozpisem jejího řešení nebudeme zabývat.

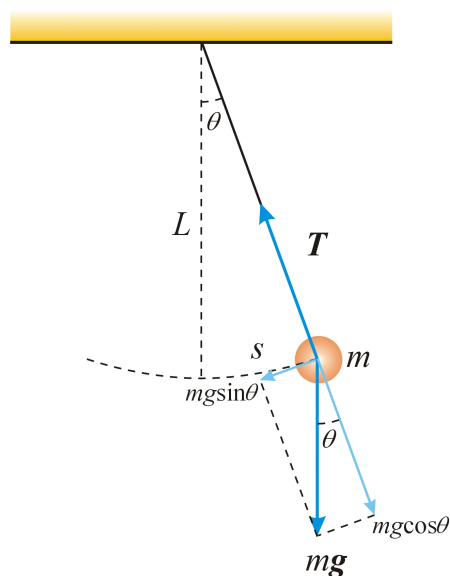
2.4.1 Matematické kyvadlo

Tento oscilátor je nejjednodušší varianta kyvadla, a proto jej uvedeme jako první. Sestrojíme jej pomocí vlákna, které zavěsíme jedním koncem na nosník, a na druhý konec uvážeme třeba kouli používanou při hře petanque (viz [obr 2.4.1](#)). Důležité je, aby vlákno mělo ve srovnání se zavěšeným tělesem zanedbatelnou hmotnost. Za **matematické kyvadlo** můžeme takto sestrojenou soustavu považovat pouze v případě, jestliže hmotnost kyvadla m bude

soustředěna do jediného bodu a vlákno o délce L budeme brát jako nehmotné. Jestliže závaží vychýlíme o malý úhel θ (do 5° , t.j. 0,0873 rad), koná potom taková idealizovaná soustava skutečně harmonický pohyb. Nicméně se výše popsaná reálná soustava matematickému kyvadlu hodně podobá a při pečlivých experimentech bychom dostali velmi podobné výsledky ve srovnání s teoretickými hodnotami.

Na závaží působí dvě síly, které jsou vyznačeny v [obrázku 2.4.1](#). Jedná se o sílu tíhovou

$F_g = mg$ a sílu vlákna T .



Obrázek 2.4.1: Matematické kyvadlo.

Sílu tíhovou rozložíme na dvě složky, a to na složku tečnou $mg\sin\theta$ a radiální $mg\cos\theta$. Tečná složka je právě tou silou, která vrací těleso do rovnovážné polohy ($\theta = 0^\circ$), a působí tedy vždy proti výchylce. S použitím druhého Newtonova zákona lze psát:

$$F_t = -mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad (2.14)$$

kde s je výchylka závaží měřená podél obloukové dráhy. Mohli bychom tedy říci, že $ds = L d\theta$ (L -délka vlákna) a pro malé úhly ($\theta \leq 5^\circ$) platí, že $\sin\theta \approx \theta$, tedy:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta \rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (\text{pro malé úhly}) \quad (2.15)$$

Všimněme si nápadné podobnosti rovnice 2.15 s rovnicí 2.2. Matematicky je zcela totožná, a proto zavedeme stejnou substituci členu g/L za ω^2 , jak jsme učinili v rovnici 2.3:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0, \quad (2.16)$$

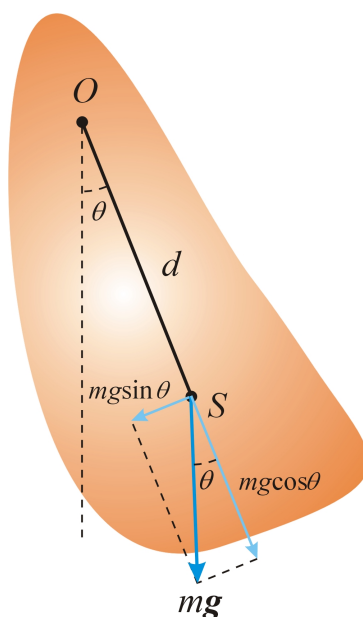
kde ω má, jak již víme, fyzikální význam vlastní frekvence oscilátoru, ze které můžeme snadno určit periodu vzniklých kmitů matematického kyvadla:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (2.17)$$

Jinak řečeno: **perioda** a **frekvence** matematického kyvadla závisí pouze na **délce závěsu** a **tíhovém zrychlení**.

2.4.2 Fyzické kyvadlo

Zatímco **matematické kyvadlo** je spíše myšlenková konstrukce, protože předpokládáme hmotnost kyvadla soustředěnou do jediného bodu, **fyzické kyvadlo** můžeme označit jako skutečné kyvadlo, kde tíhová síla působí v těžišti S a kyvadlo má svůj moment setrvačnosti J vzhledem k ose otáčení O (viz [obrázek 2.4.2](#)).



Obrázek 2.4.2: Fyzické kyvadlo.

Síla $F_t = mgsin\theta$ je **vratnou silou** působící na **fyzické kyvadlo** v těžišti S . Jelikož se jedná o otáčivý účinek síly na tuhé těleso, kde je hmotnost spojitě rozložena, je nutné do pohybové rovnice dosazovat **moment síly** $M = mgdsin\theta$, kde d je **rameno síly** F_t . Současně také víme, že celkový moment síly působící na těleso je přímo úměrný **momentu setrvačnosti** a úhlovému zrychlení tělesa (síla $\rightarrow$ moment síly, hmotnost $\rightarrow$ moment setrvačnosti, zrychlení $\rightarrow$ úhlové zrychlení), tedy $M = J\varepsilon$. Můžeme pak snadno sestavit **pohybovou rovnici**:

$$J \epsilon = -mgd \sin \theta \quad ,$$

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mgd \sin \theta = 0 \quad ,$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{mgd}{J} \sin \theta = 0 \quad ,$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega^2 \sin \theta = 0 \quad , \quad (2.18)$$

kde ω má znovu význam vlastní **frekvence** kyvadla a **perioda kmitů** je

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{J}} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}} \quad . \quad (2.19)$$

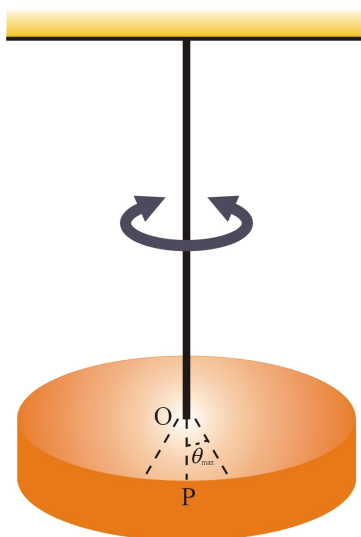
Všimněme si ještě, že pokud dosadíme za moment setrvačnosti md^2 , což platí pro matematické kyvadlo, dostane vzorec 2.19 stejný tvar jako 2.17.

2.4.3 Torzní kyvadlo

Zvláštní případ kyvadla můžeme vidět na [obrázku 2.4.3](#). Jedná se o tzv. **torzní kyvadlo**, kde vratným elementem je zkrut (kroucení = torze) závěsu, např. tenké kovové tyče. Jestliže disk zavěšený na tyčce rozkmitáme tak, že jej pootočíme o úhel $\theta_{\max}$ v rovině rovnoběžné s plochou disku, dojde k tzv. **torzním kmitům**. Pro moment síly způsobující vratný efekt platí vztah:

$$M = -\kappa \theta \quad , \quad (2.20)$$

kde κ (kappa) se nazývá **torzní konstantou** nebo **torzní tuhostí** či **tuhostí ve zkrutu** a její jednotky jsou N.m.rad^{-1} .



Obrázek 2.4.3: Torzní kyvadlo.

Jedná se tedy v podstatě o torzní variantu Hookova zákona a s použitím druhého Newtonova zákona pro rotační pohyb dostáváme zase tutéž rovnici jako v případech [2.16](#) či [2.18](#)..

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{J} \theta = 0 \quad ,$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0 \quad . \quad (2.21)$$

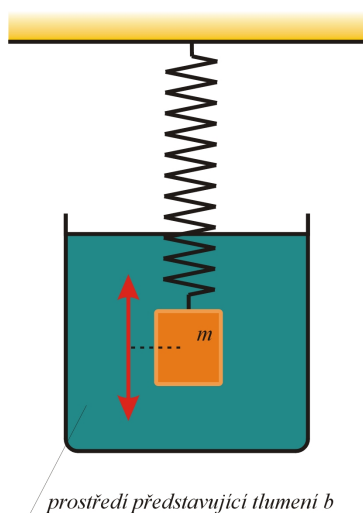
kde J je moment setrvačnosti kmitajícího disku. Analogicky s předchozími kyvadly dostáváme pro vlastní frekvenci torzního kyvadla a jeho periodu kmitání vztah

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{J}} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\kappa}} \quad . \quad (2.22)$$

Ke všem předchozím kyvadlům je dlužno dodat, že řešením diferenciální rovnice je pro všechny případy vztah pro okamžitou výchylku $\theta = \theta_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$.

2.5 Tlumené kmity

V předchozích podkapitolách jsme u kmitání těles zanedbávali odpor prostředí. Vždy jsme tedy řešili ideální situaci, kdy nedochází k tlumení kmitání, což rozhodně neodpovídá realitě (nikdy nám rozkmitané těleso nebude kmitat do nekonečna:-)) [Obrázek 2.5.1](#) ilustruje kmitání tělesa v tlumícím prostředí.



Obrázek 2.5.1: Tlumený harmonický oscilátor.

Abychom mohli napsat pohybovou rovnici pro tlumené kmitání, musíme si definovat tzv. odporovou sílu. **Odporová síla** (někdy také brzdná síla) obecně závisí na mnoha faktorech,

ale v našem případě si ji můžeme výrazně zjednodušit. Intuitivně si asi každý může odvodit, že odporová síla musí záviset na velikosti rychlosti.

Dobrým příkladem pro tento předpoklad může být padající těleso v gravitačním poli, kdy sílu tíhovou postupně vyrovnává síla odporová. Jestliže budeme předpokládat, že hustota vzduchu se při vyrovnávání sil téměř nezmění, a průřez tělesa se také nezmění, musí nárůst velikosti odporové síly nutně přímo úměrně souviset se zvyšováním rychlosti.

Pro malé rychlosti platí, že velikost odporové síly je přímo úměrná velikosti rychlosti. Tedy

$$F_{od} = -bv \quad , \quad (2.23)$$

kde b je koeficient odporu prostředí. Užitím druhého Newtonova zákona bude mít pohybová rovnice následující tvar:

$$\sum F_y = ma_y = -ky - bv_y \quad ,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -b \frac{dy}{dt} - ky \quad .$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = 0 \quad . \quad (2.24)$$

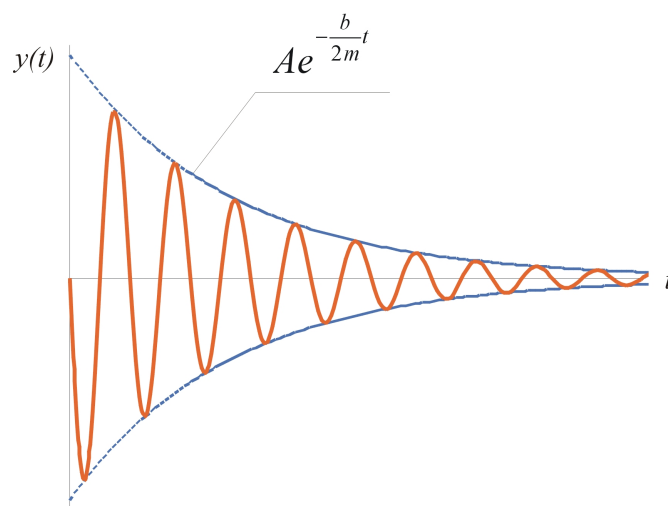
Postup řešení diferenciální rovnice [2.24](#) je poněkud složitější než v případě [2.3](#), a proto si zde uvedeme pouze její řešení

$$y(t) = A e^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\omega t + \varphi) \quad , \quad (2.25)$$

kde úhlová frekvence tlumeného oscilátoru je

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad . \quad (2.26)$$

Graf funkce okamžité výchylky závislé na čase (rovnice [2.25](#)) je znázorněn na [obrázku 2.5.2](#). Všimněme si, že funkce shora i zdola omezená je exponenciální funkcí amplitudy, jejíž velikost u tlumených kmitů musí logicky s časem klesat.



Obrázek 2.5.2: Závislost okamžité výchylky na čase pro tlumené kmitání.

Proveďme ještě diskuzi k výrazu 2.26 pro úhlovou frekvenci tlumeného oscilátoru. Pokud je $b=0$, pak tlumení zmizí, čímž se výraz redukuje na vlastní úhlovou frekvenci netlumeného oscilátoru. Jestliže bude $b \ll (km)^{1/2}$, řekneme, že je **tlumení slabé**, tedy $\omega \approx \omega_0$. Při **tlumení silném** se při jisté kritické hodnotě koeficientu odporu prostředí $b_c = 2(km)^{1/2}$ výraz pod odmocninou v 2.26 rovná nule. Při ještě silnějším tlumení $b > (km)^{1/2}$ se celé řešení rovnice 2.24 už kvalitativně mění a dochází k tzv. **aperiodickému pohybu**.

2.6 Nucené kmity

Jak už sám název podkapitoly napovídá, jedná se nyní o kmitání, jehož existenci podmiňuje **vnější budící síla**, kterou lze jednoduše vyjádřit takto:

$$F(t) = F_0 \sin(\omega_b t) \quad , \quad (2.27)$$

kde ω_b je úhlová frekvence budící síly. Nyní můžeme sestavit pohybovou rovnici, u které uvedeme pouze její výsledek a podrobným řešením se zabývat nebudeme:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = F_0 \sin(\omega_b t) \quad . \quad (2.28)$$

Oscilátor, který by konal **nucené kmity**, si můžeme představit pomocí [obrázku 2.5.1](#) pro tlumené kmity, kde původně pevný nosník, na němž je zavěšena pružina, by nebyl pevný, ale konal by kmity právě s úhlovou frekvencí ω_b .

Řešením rovnice je pak výraz velmi podobný jako ve 2.4, přičemž rozdíl je kromě vnucené frekvence ω_b také v amplitudě, která je funkcí proměnných jak ω_0 tak ω_b :

$$y(t) = A \sin(\omega_b t + \varphi) \quad , \quad (2.29)$$

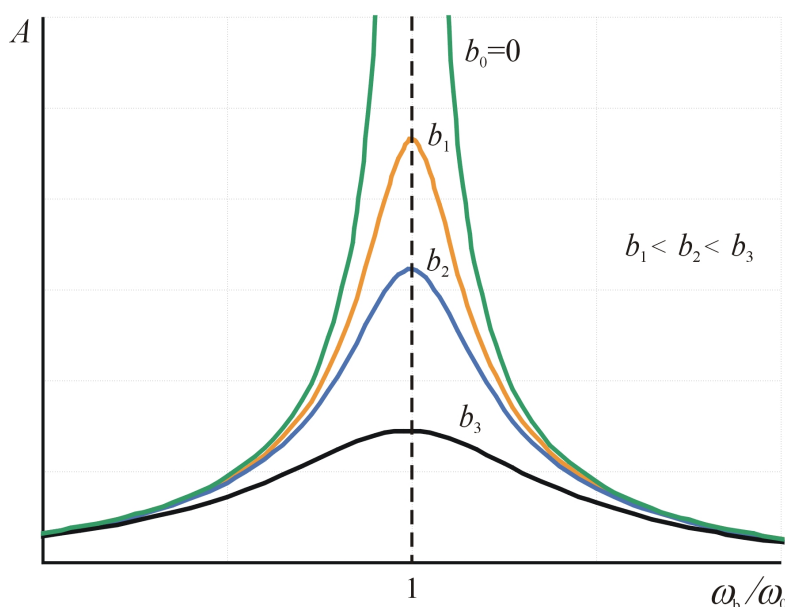
$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_b^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega_b}{m}\right)^2}}, \quad (2.30)$$

kde ω_0 je vlastní frekvence netlumeného oscilátoru ($b=0$).

Všimněme si nyní, že amplituda nucených kmitů bude přibližně tím větší, čím více se sobě budou hodnoty obou frekvencí blížit svou velikostí. Splníme-li tedy podmínku:

$$\omega_b \approx \omega_0, \quad (2.31)$$

dojde k "dramatickému" zvýšení amplitudy (viz [obrázek 2.6.1](#)). Takový jev nazýváme **rezonancí** a ω_0 můžeme nazvat **rezonanční frekvencí**.



Obrázek 2.6.1: Závislost amplitudy nucených kmitů na poměru budící frekvence versus vlastní frekvence oscilátoru. Amplituda je největší, je-li poměr ω_b/ω_0 přibližně roven 1 (je v rezonanci).

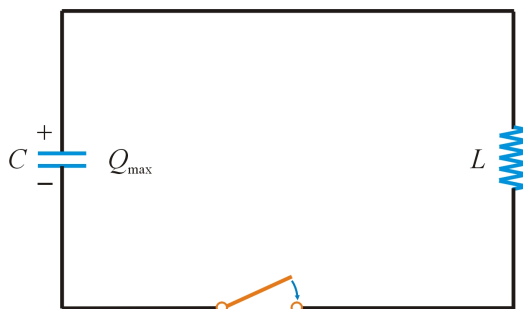
2.7 Elektromagnetické kmity

V této podkapitole se budeme zabývat kmity, které vznikají v RLC obvodech. Fyzikálně vzato jsou elektromagnetické kmity zcela jiné podstaty ve srovnání s kmity mechanickými. Nicméně matematika, která se pro popis těchto kmitů používá je téměř totožná (viz [tab. 2.1](#)).

2.7.1 Netlumené kmity v LC obvodu

Představme si nyní elektrický obvod s cívkou a kondenzátorem, kde nebudeme uvažovat odpor drátů ani součástek v obvodu zapojených. Jak známo cívka je charakterizována vlastní indukčností a kondenzátor kapacitou, proto takový zapojení nazveme **LC obvodem** (viz [obr.](#)

[2.7.1](#)). Takový obvod má svou analogii u mechanických kmitů na pružině, kde jsme neuvažovali odpor prostředí.



Obrázek 2.7.1: Příklad LC obvodu, kde je kondenzátor před sepnutím spínače nabit na $Q_{\max}$.

Předpokládejme, že na kondenzátoru je počáteční náboj $Q_{\max}$ a v čase $t = 0$ sepneme spínač. Nyní se zamyslíme nad tím, co po sepnutí bude v obvodu ([obr. 2.7.1](#)) následovat. Na celou situaci se podíváme z pohledu energie. Elektrická energie kondenzátoru je definována vztahem:

$$E_{el} = \frac{1}{2} \frac{Q_{\max}^2}{C} , \quad (2.32)$$

kde C je kapacita kondenzátoru. Po sepnutí spínače se začne kondenzátor vybíjet a proud v čase exponenciálně klesá (viz elektrina-kondenzátory). Jak již z Faradayova zákona elektromagnetické indukce víme, mění-li se proud v cívce v čase, indukuje se v cívce elektromotorické napětí $U = -L(dI/dt)$ a pro magnetickou energii pak platí:

$$E_{mag} = \frac{1}{2} LI^2 , \quad (2.33)$$

kde L je vlastní indukčnost cívky a I je proud procházející obvodem. Podobně jako u netlumených mechanických kmitů se i zde musí energie zachovávat. Jinak řečeno se energie elektrická mění na magnetickou a naopak, tedy:

$$E = E_{el} + E_{mag} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2} LI^2 , \quad (2.34)$$

Vzhledem k tomu, že v LC obvodu neuvažujeme odpor, nedochází tedy ke energetickým ztrátám a musí být celková energie celého obvodu v čase konstantní:

$$\frac{dE}{dt} = 0 . \quad (2.35)$$

Použitím [2.35](#) a diferenciací rovnice [2.34](#) dostáváme:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} LI^2 \right) = \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = 0 . \quad (2.36)$$

a s použitím vztahu pro proud $I = dQ/dt$ můžeme vyjádřit základní diferenciální rovnici pro netlumené kmity v LC obvodu:

$$LI \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = 0 \quad , \quad (2.37)$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0 \quad . \quad (2.38)$$

Všimneme-li si nápadné podobnosti rovnice [2.38](#) s rovnicí [2.2](#), zjistíme, že z matematického hlediska jsou tyto rovnice zcela totožné:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \quad ,$$

kde $k/m = \omega^2$ a ω má význam vlastní úhlové frekvence. Analogicky můžeme vyjádřit vlastní úhlovou frekvenci pro netlumené LC kmity, tedy:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad , \quad (2.39)$$

kde L je vlastní indukčnost cívky a C je kapacita kondenzátoru.

Řešením rovnice [2.2](#) je funkce okamžité výchylky závislé na čase:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad ,$$

kde A je amplituda, nebo-li maximální výchylka a φ je počáteční fáze (úhel). Vzhledem k tomu, že se jedná o matematicky zcela totožnou rovnici [2.38](#) s rovnicí [2.2](#), pak i její řešení je stejné a obsahuje pouze jiná "písmenka":

$$Q(t) = Q_{\max} \sin(\omega t + \varphi) \quad , \quad (2.40)$$

kde $Q_{\max}$ je maximální hodnota náboje na kondenzátoru. Stejně řešení dostaneme i pro časovou závislost proudu, víme-li, že $I = dQ/dt$:

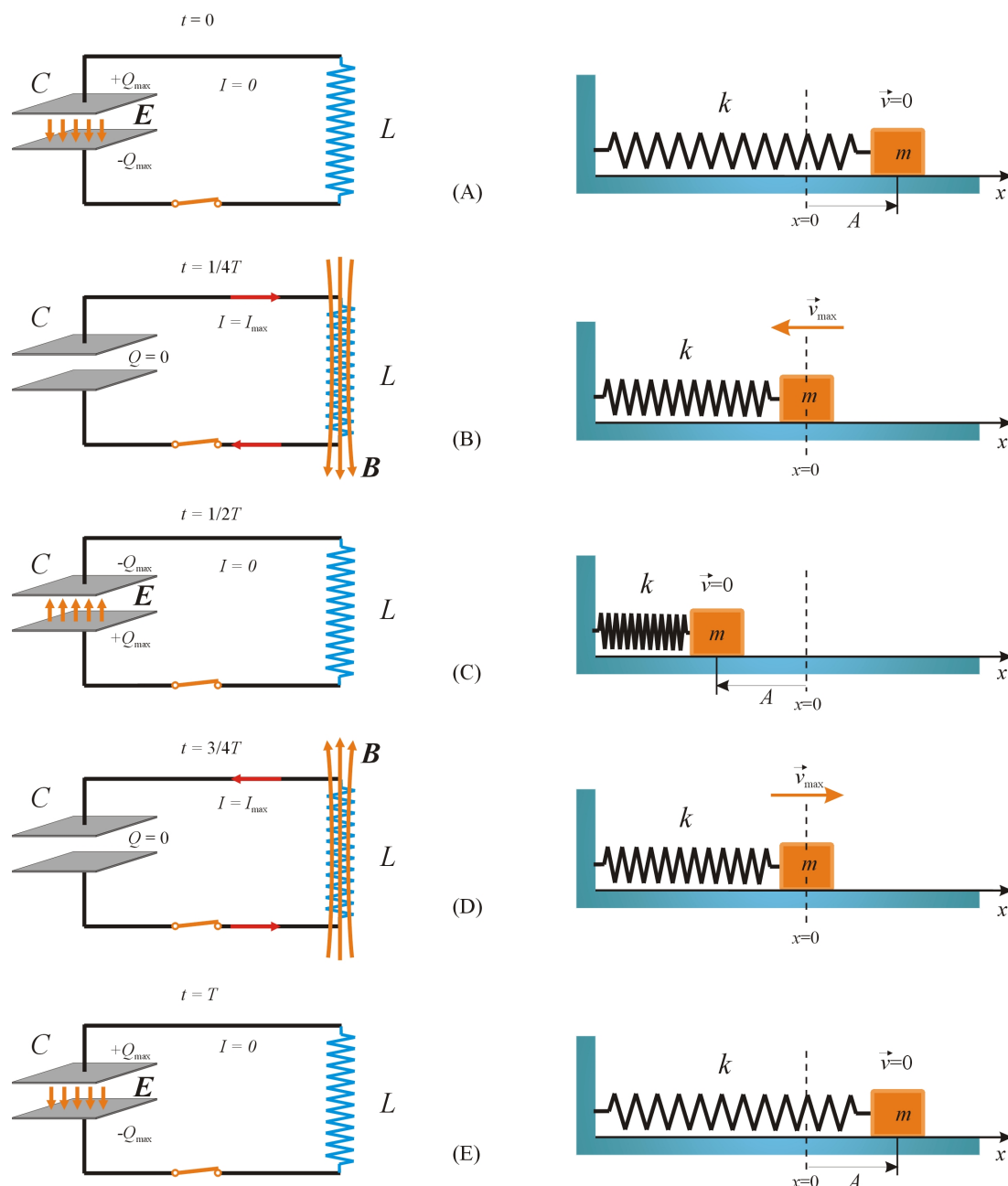
$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d[Q_{\max} \sin(\omega t + \varphi)]}{dt} = \omega Q_{\max} \cos(\omega t) \quad , \quad (2.41)$$

kde $\omega Q_{\max}$ má význam amplitudy proudu $I_{\max}$ a funkce kosinus nás upozorňuje, že proud se vůči náboji zpožďuje o 90° :

$$I(t) = I_{\max} \sin(\omega t + \varphi) \quad , \quad (2.42)$$

kde φ je v tomto případě vůči náboji $-\pi/2$.

Analogii netlumených kmitů v LC obvodu s kmity mechanickými dobře ilustruje i [obrázek 2.7.2](#), kde jsou jednotlivé situace v obvodu po čtvrtinách periody srovnány s kmity tělesa na pružině.



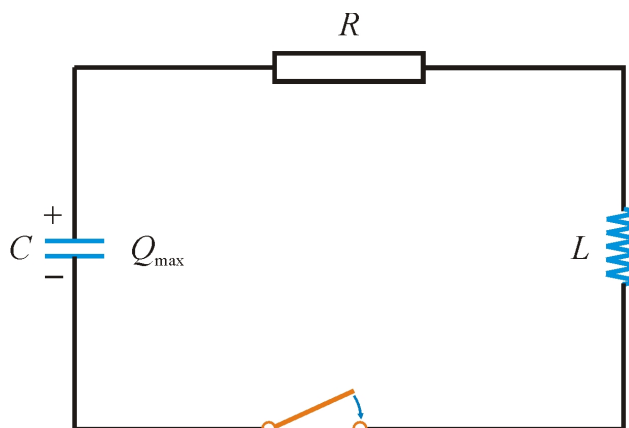
Obrázek 2.7.2: Příklad oscilace náboje v LC obvodu (bez odporu = netlumené oscilace) ve srovnání s netlumenými mechanickými kmity. E je intenzita elektrického pole v kondenzátoru a B je magnetická indukce vznikající díky cívce procházejícím proudem, přičemž proud v čase exponenciálně klesá, jak se kondenzátor vybíjí a díky tomu se na cívce indukuje elektromotorické napětí podle Faradayova zákona.

Jednotlivé kroky v [obrázku 2.7.2](#) si lze ještě vysvětlit i z pohledu energie, jak jsme oscilační obvod diskutovali již v úvodu. Krok (A) ilustruje situaci, kdy se začíná vybíjet kondenzátor (energie elektrická je maximální) a náboj v něm začne klesat, čímž v obvodu začíná klesat i proud. V případě (B) dochází k indukci elektromotorického napětí na cívce, jejíž příčinou je časově proměnný proud a elektrická energie z kondenzátoru se postupně přemění na energii magnetickou. V obrázku (C) se cívka vybíjí a vrací svou energii zpět do kondenzátoru. V

kroku (D) se zase kondenzátor vybíjí a v cívce se indukují elektromotorické napětí, následně v případě (E) se cyklus uzavírá a kondenzátor je stejně polarizován jako na začátku (A).

2.7.2 Tlumené kmity v RLC obvodu

Nyní se znovu jedná o analogii s tlumenými kmity mechanickými. Tlumící součástku zde představuje rezistor, který spotřebovává energii, čímž snižuje celkovou energii v obvodu, tedy $E_{el} + E_{mag} = -ER$. Elektrický odpor rezistoru je analogií k odporu prostředí při mechanickém kmitání. Zapojení oscilačního RLC obvodu je znázorněno na [obrázku 2.7.3](#).



Obrázek 2.7.3: Příklad zapojení RLC obvodu před sepnutím, kdy na kondenzátoru je náboj Q_{max} .

Rovnice energii tlumených kmitů v RLC obvodu sestavíme podobně jako ve [2.38](#) a pouze přidáme člen disipující energii ($-RI^2 = -RdQ/dt$) v rezistoru:

$$LI \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = -RI^2, \quad (2.43)$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0. \quad (2.44)$$

Všimněme si opět nápadné podobnosti rovnice [2.44](#) s rovnicí [2.24](#). Řešení této rovnice je zase stejné jen s jinými „písmeny“:

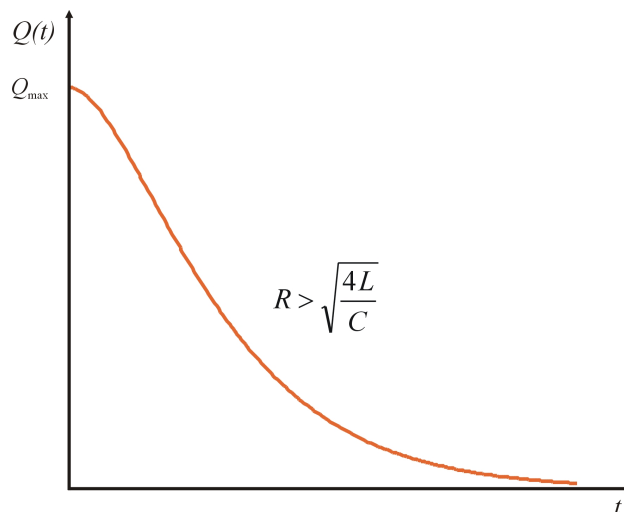
$$Q(t) = Q_{max} e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.45)$$

kde ω je úhlová frekvence tlumených kmitů v RLC oscilátoru.

$$\omega = \left[\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.46)$$

Z rovnice [2.45](#) je zřejmé, že amplituda klesá s časem a její funkce má tentýž průběh, jako na [obrázku 2.5.2](#). Provedme ještě diskuzi k rovnici [2.46](#). Jestliže bude odpor $R \ll (4L/C)^{1/2}$, pak snadno dosazením zjistíme, že úhlová frekvence tlumeného oscilátoru bude téměř rovna

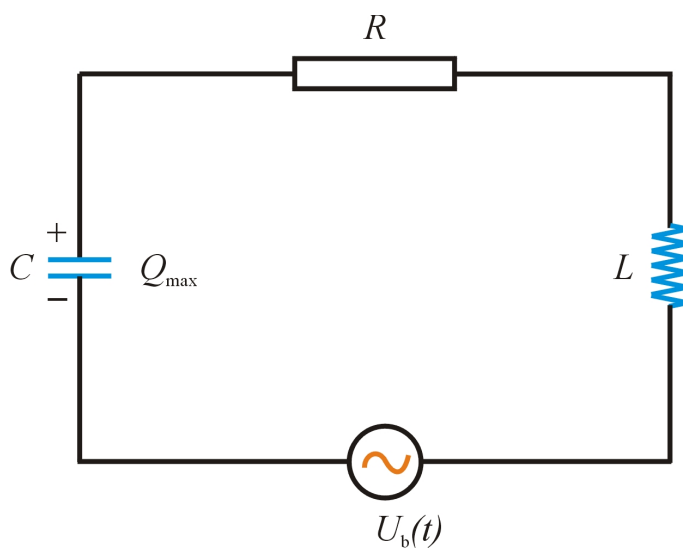
vlastní úhlové frekvenci oscilátoru netlumeného, tedy $(1/LC)^{1/2}$. Pokud ovšem bude hodnota odporu rovna výrazu $(4L/C)^{1/2}$, oscilace se neobjeví a mluvíme o tzv. kritickém tlumení ($R_c = (4L/C)^{1/2}$). K **nadkritickému tlumení** musí samozřejmě dojít v případě $R > R_c$, což ilustruje [obrázek 2.7.4](#).



Obrázek 2.7.4: Graf závislosti okamžitého náboje na čase při nadkritickém tlumení v RLC obvodu.

2.7.3 Nucené kmity v oscilačním obvodu

Připojíme-li k RLC obvodu vnější střídavé napětí (viz [obr. 2.7.5](#)) s úhlovou frekvencí ω , pak podobně jako při vnější budící síle v podkapitole 2.6 mluvíme o nuceném kmitání. Každý RLC obvod má svou úhlovou frekvenci, ale vždy v něm po určité době oscilace vymizí. Proto i intuitivně si lze odvodit, že tyto kmity po relativně krátké době převezmou úhlovou frekvenci budícího elektromotorického napětí, ať už byla původní frekvence jakákoliv.



Obrázek 2.7.5: Schéma zapojení RLC obvodu s vnějším budícím napětím $U_b(t)$ podmiňující nucené kmity.

Na závěr této podkapitoly si ještě uvedme [tabulku 2.1](#) znázorňující matematické analogie mezi elektromagnetickými a mechanickými kmity.

Tabulka 2.1

<i>Elektromagnetické kmity</i>		<i>Mechanické kmity</i>
Náboj	$Q(t) \leftrightarrow x(t)$	Výchylka
Proud	$I(t) \leftrightarrow v(t)$	Rychlost
Napětí	$U(t) \leftrightarrow F(x)$	Síla
Odpor	$R \leftrightarrow b$	Tlumicí koeficient
Kapacita	$C \leftrightarrow 1/k$	Tuhost pružiny
Vlastní indukčnost	$L \leftrightarrow m$	Hmotnost
Proud = derivace náboje podle času	$I = \frac{dQ}{dt} \leftrightarrow v = \frac{dx}{dt}$	rychlost = derivace výchylky podle času
Rychlost změny proudu = druhá derivace náboje podle času	$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2} \leftrightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Zrychlení = druhá derivace výchylky podle času
Energie v cívce	$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} LI^2 \leftrightarrow E_k = \frac{1}{2} mv^2$	Kinetická energie
Energie v kondenzátoru	$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \leftrightarrow E_p = \frac{1}{2} kx^2$	Potenciální energie
Rychlost disipace energie na odporu	$I^2 R \leftrightarrow bv^2$	Rychlost disipace energie třením
Budící napětí	$U_b = U_0 \sin(\omega_b t) \leftrightarrow F_b = F_0 \sin(\omega_b t)$	Budící síla
Netlumené oscilace v LC obvodu	$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0 \leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$	Pohybová rovnice pro netlumené mechanické kmity
Tlumené oscilace v RLC obvodu	$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0 \leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$	Pohybová rovnice pro tlumené mechanické kmity
Nucené oscilace v RLC obvodu	$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = U_0 \sin(\omega_b t) \leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = F_0 \sin(\omega_b t)$	Pohybová rovnice pro nucené mechanické kmity

2.8 Skládání kmitů

V mechanice (např. vrhy těles) jsme zjistili, že konečná poloha tělesa, které koná určitý křivočarý pohyb, nebo-li koná současně více pohybů, je stejná, jako kdyby těleso konalo tyto pohyby po sobě v libovolném pořadí. Tento tzv. **princip superpozice** platí i pro kmity:

Koná-li hmotný bod současně několik harmonických pohybů, je jeho okamžitá výchylka určena vektorovým součtem okamžitých výchylek jednotlivých harmonických pohybů.

Je nutné znovu zdůraznit, že výše uvedený princip platí stejně i pro oscilace náboje, proudu nebo napětí. Průběh složeného kmitání (oscilací) je závislý na směru jednotlivých složek, jejich počtu, amplitudách, počáteční fázi a frekvenci. Složené kmity mívají často velmi složitý průběh, ale my se v následujícím textu budeme zabývat pouze těmi jednoduššími případy, kdy všechny složky leží v jedné přímce nebo v přímkách na vzájem kolmých.

2.8.1 Skládání stejnosměrných kmitů o shodné frekvenci

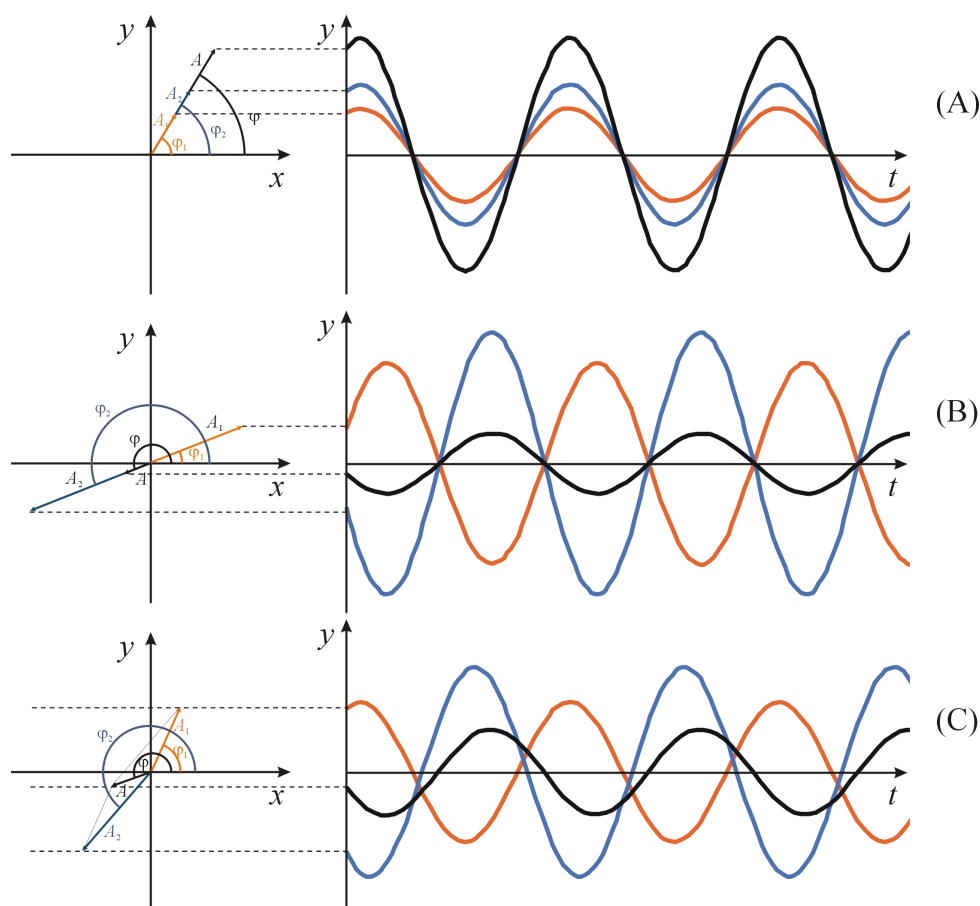
Jestliže se jedná o harmonické kmity stejné frekvence, nazýváme je **izochronní kmity** (z řečtiny *izos* - stejný, *chronos* - čas). Pro tyto kmity platí následující rovnice:

$$\begin{aligned}y_1 &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad , \\ y_2 &= A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \quad .\end{aligned}\tag{2.47}$$

Složením (superpozicí) těchto kmitů vznikají **harmonické kmity** o stejné úhlové frekvenci, ovšem s jinou amplitudou a počáteční fází:

$$y = y_1 + y_2 = A \sin(\omega t + \varphi) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \quad .\tag{2.48}$$

Výslednou amplitudu A a počáteční fázi φ lze nalézt pomocí tzv. fázorového diagramu (viz [obr. 2.8.1](#)) podobně, jak jsme vektorově (fázorově) sčítali například napětí v RLC obvodech.



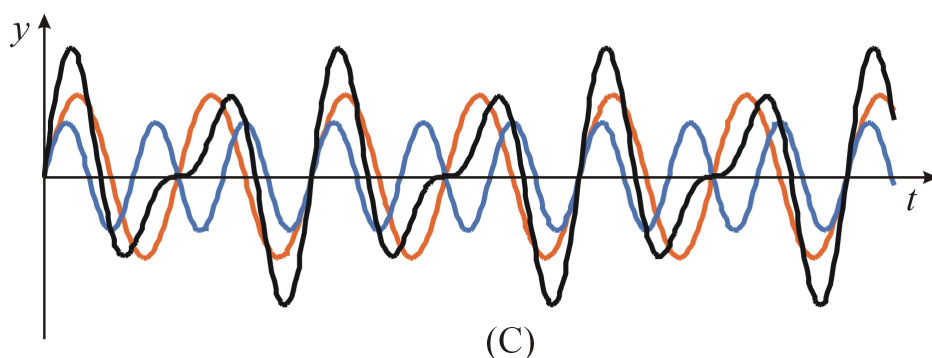
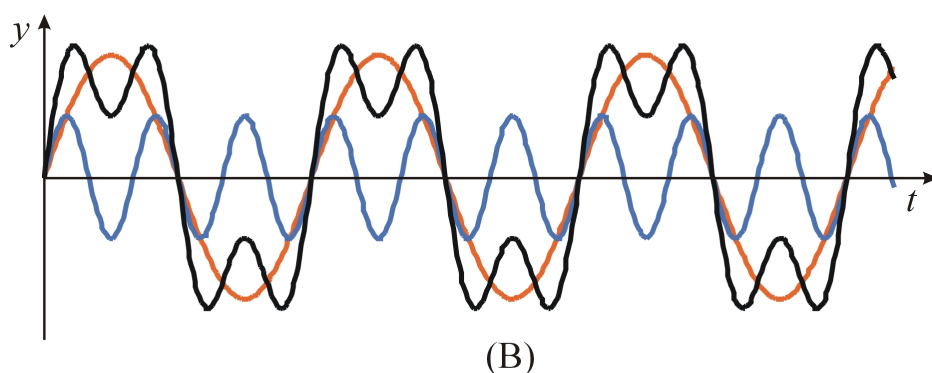
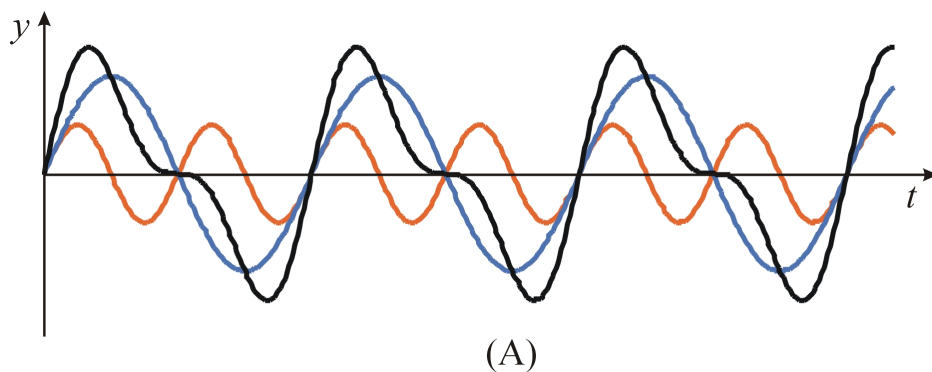
Obrázek 2.8.1: Skládání kmitů o stejné frekvenci, (A) kmitý stejné fáze, (B) opačné fáze, (C) různé fáze.

Vztah pro amplitudu výsledného kmitání zde uvedeme bez odvození, přestože je z matematického hlediska jednoduché:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (2.49)$$

2.8.2 Skládání stejnosměrných kmitů o různých frekvencích

Superpozicí harmonických kmitů různé frekvence vznikají kmitý **anharmonické** (neharmonické), narozdíl od skládání kmitů stejné frekvence, které je periodické jedině v případě, kdy jsou frekvence skládaných kmitů v poměru celých čísel. Na [obrázku 2.8.2](#) vidíme tři příklady superpozice kmitů o různých poměrech frekvencí a, pro jednoduchost, se stejnou fází.



Obrázek 2.8.2: Skládání kmitů o různých frekvencích, (A) poměr frekvencí 1:2, (B) poměr frekvencí 1:3, (C) poměr frekvencí 2:3.

2.8.3 Skládání stejnosměrných kmitů o blízkých frekvencích

V případě skládání kmitů o podobných frekvencích se jedná o zvláštní případ superpozice kmitů různých frekvencí. Pokusme se najít rovnici výsledného kmitání za předpokladů, že $A_1=A_2=A$, $\varphi_1=\varphi_2=0$, $\omega_1=\omega-\Delta\omega$, $\omega_2=\omega+\Delta\omega$, přičemž $\Delta\omega \ll \omega$. Jednotlivé kmitý jsou popsány rovnicemi:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega_1 t) \quad , \quad y_2 = A_2 \sin(\omega_2 t) \quad . \quad (2.50)$$

Prostým součtem rovnic [2.50](#) a užitím pravidla pro sčítání funkcí sinus dostaneme rovnici:

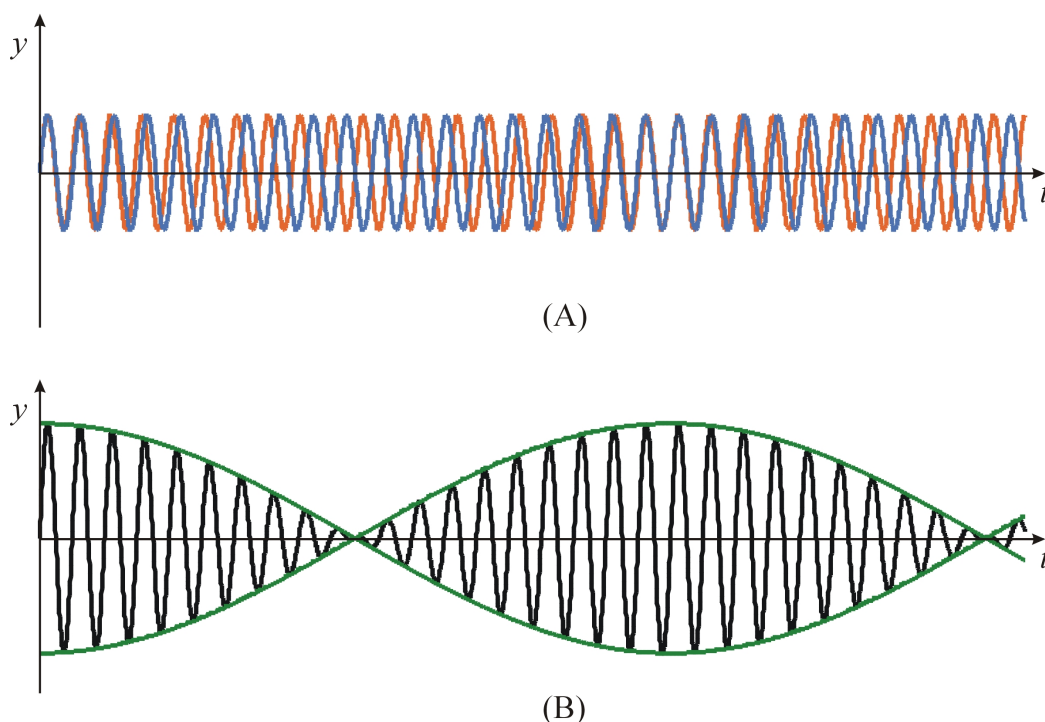
$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \sin \frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2} = 2A \cos(\Delta\omega t) \sin(\omega t) \quad (2.51)$$

Výsledné kmitání (viz [obr. 2.8.3](#)) tedy není harmonické, nicméně při malém rozdílu frekvencí lze jej považovat za "přibližně harmonické" s periodou $T = 2\pi/\omega$. Z rovnice [2.51](#) si můžeme vyjádřit měnící se amplitudu výchylky:

$$A = |2A \cos(\Delta\omega t)| \quad (2.52)$$

Při tomto druhu skládání kmitů dochází k vzniku tzv. **rázů** (viz [obr. 2.8.3](#)), které mají následující periodu, respektive frekvenci:

$$T_R = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\pi}{\Delta\omega} \rightarrow f_R = \frac{1}{T} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = t_2 - t_1 \quad (2.53)$$



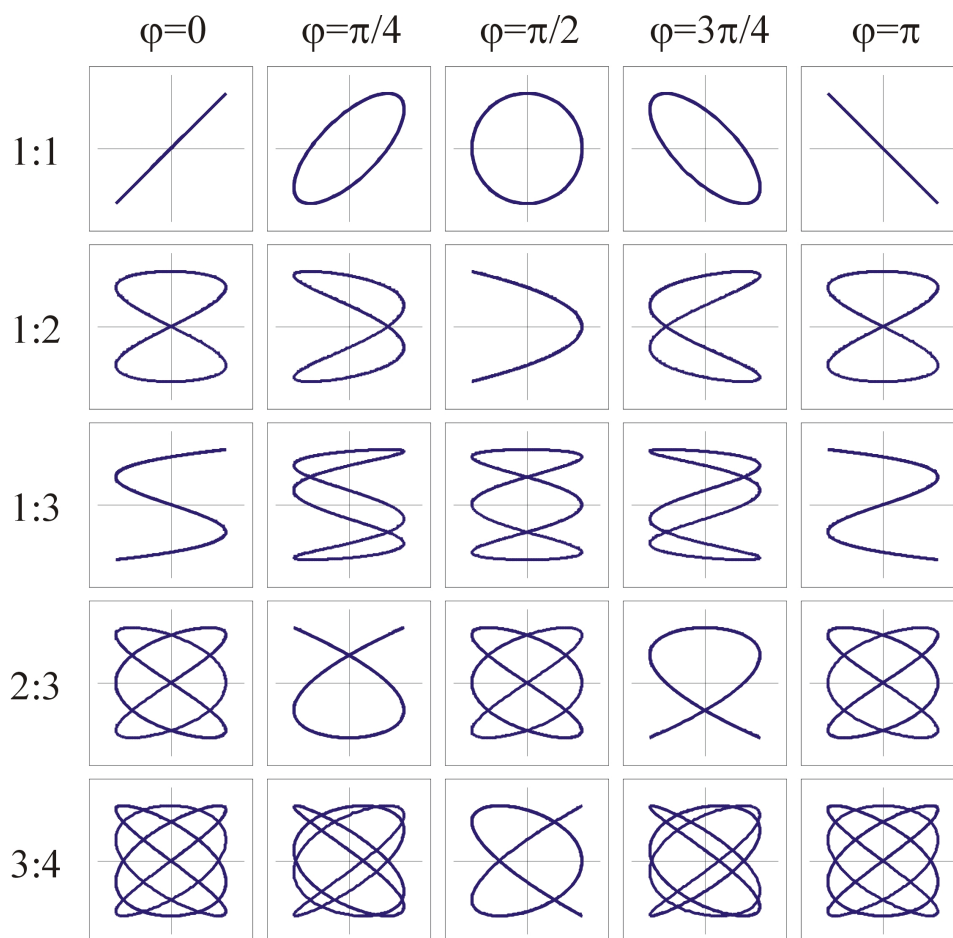
Obrázek 2.8.3: Skládání kmitů o blízkých frekvencích - vznik rázů, (A) původní kmitů, (B) rázy.

2.8.4 Skládání kolmých kmitů

Pokud je kmitání složeno z kmitů navzájem kolmých, leží pak výsledná trajektorie v rovině. Okamžité výchylky jednotlivých složek jsou dány rovnicemi:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_X \sin(\omega_X t + \varphi_X) \\ y(t) &= A_Y \sin(\omega_Y t + \varphi_Y) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Obecně je výsledná rovnice či trajektorie složeného kmitání poměrně složitá (viz [obr. 2.8.4](#)) a vznikají tzv. **Lissajousovy obrazce**.



Obrázek 2.8.4: Skládání kmitů vzájemně kolmých - Lissajousovy obrazce (vodorovně-fázový rozdíl, svisle-poměr frekvencí).