3 Vlny

3.1 Úvod

Vlnění můžeme pozorovat například na vodní hladině, hodíme-li do vody kámen. Mechanické vlnění je děj, při kterém se kmitání šíří látkovým prostředím. To znamená, že například zvuk, který je mechanickým vlněním, se může šířit pouze prostředím, jehož částice si mohou předávat energii kmitů mezi sebou. Jedná se o dvojnásobně periodický děj, který má jak časovou, tak prostorovou periodicitu. Jak známo, elektromagnetické vlny látkové prostředí pro svůj přenos nepotřebují a šíří se naopak ve vakuu nejlépe. V této kapitole se však budeme zabývat pouze mechanickým vlněním a elektromagnetickým vlnám se bude věnovat samostatná 5. kapitola.

3.2 Rovnice postupné vlny v bodové řadě a v prostoru

Nejjednodušší případ mechanického vlnění vzniká přenosem energie v přímé řadě složené z jednotlivých hmotných bodů, které reprezentují soustavu spřažených oscilátorů. V tomto případě se vlnění šíří pouze po přímce (bodové řadě) a procesu se neúčastní ostatní body prostoru. Zákony pro šíření vln v **bodové řadě** jsou poněkud jednodušší než zákony **vlnění prostorového**. Rozebereme tedy nejdříve rovnici postupné vlny v bodové řadě, které rozdělujeme na **vlnění postupné příčné – transverzální** (kolmo ke směru šíření vlny - rozkmitané lano) a **vlnění postupné podélné – longitudální** (ve směru šíření vlny - zvuk).

3.2.1 Vlnění postupné příčné

Vlnění se v pružném prostředí šíří **rychlostí** v, která závisí na vlastnostech prostředí. jestliže zdroj vlnění kmitá s **frekvencí** f=1/T, pak vlnění za dobu T dospěje do vzdálenosti λ, kterou nazýváme **vlnová délka** a platí vztah:

$$\lambda = vT - \frac{v}{f} \quad . \qquad (3.1)$$

Uvažujme, že zdroj **Z** vlnění kmitá harmonicky podle následující rovnice (viz 2. kapitola Kmity):

$$y = A\sin(\omega t) \quad , \qquad (3.2)$$

kde y je okamžitá výchylka, A je amplituda, ω je úhlová frekvence a t je čas. Vlnění se šíří v přímé bodové řadě v kladném směru osy x. Do bodu **X** (viz obr. 3.2.1) ve vzdálenosti x od zdroje **Z** vlnění dospěje za dobu $\tau = x/v$ (kde v je rychlost vlnění). Což znamená, že kmitání bodu **X** bude mít stejnou okamžitou výchylku jako zdroj **Z** o dobu τ později:

$$y = A \sin \omega (t - \tau) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad , \tag{3.3}$$

Dosadíme-li za $\omega = 2\pi/T$ a použijeme-li výraz pro **vlnovou délku** 3.1, dostaneme **rovnici postupné vlny** pro řadu bodů:

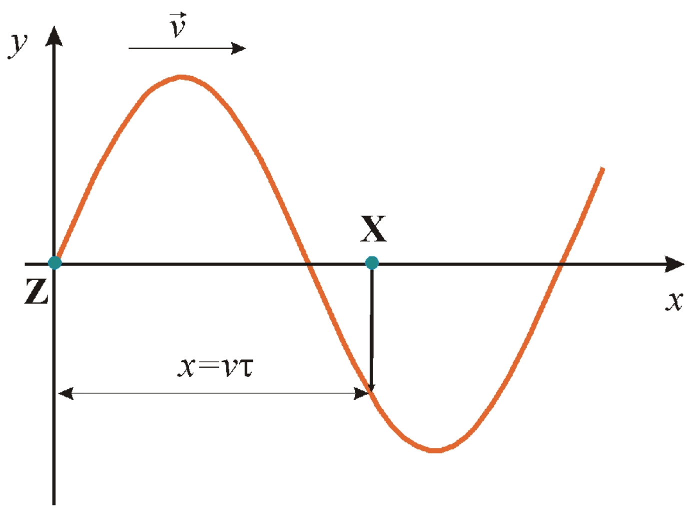
$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad , \tag{3.4}$$

Často bývá vztah 3.4 zapisován s pomocí tzv. **vlnového čísla** $k = 2\pi/\lambda$:

$$y = A \sin (\omega t - kx) \quad . \tag{3.5}$$

Ze vztahu 3.4 a 3.5 je mimo jiné také dobře vidět, že body, které leží ve směru šíření vln, kmitají s fázovým zpožděním oproti bodu v počátku souřadnic

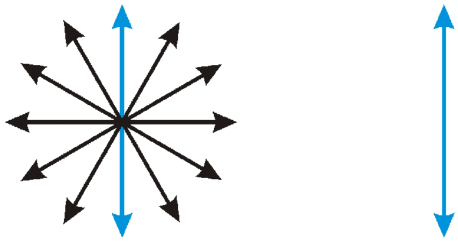
$$\varphi = 2\pi \frac{x}{\lambda} = kx \quad . \tag{3.6}$$



Obrázek 3.2.1: Postupná vlna řady bodů.

Vlnění je tedy periodický děj, který má **periodu časovou** vyjádřenou veličinami ω, T a **periodou prostorovou** vyjádřenou reprezentovanou veličinami k a λ.

Příčné postupné vlnění je charakterizováno také ještě **směrem kmitání**. Směr kmitání je dán směrem, ve kterém se body řady vychylují z rovnovážné polohy. Obecně může kmitání bodů řady probíhat ve všech možných směrech (viz obr. 3.2.2a). Vlnění, kdy všechny body řady kmitají v jednom směru, nebo-li v jedné rovině, nazýváme **lineárně polarizované vlnění** (viz obr. 3.2.2b).



Obrázek 3.2.2: Pohled, kdy se vlny šíří směrem k nám (a) nepolarizované vlnění (a) polarizované vlnění.

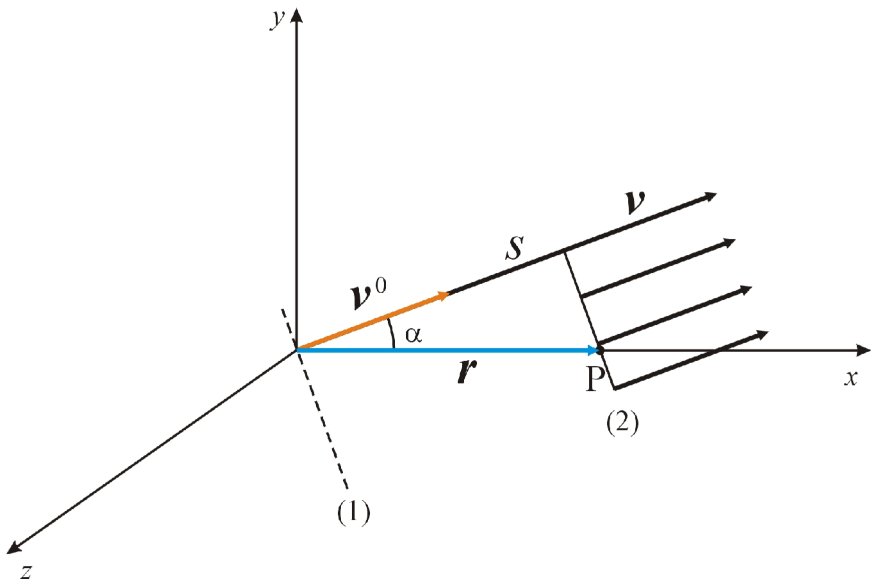
3.2.2 Vlnění postupné podélné

V případě podélného vlnění kmitají všechny body řady ve směru šíření vln. Souřadnice x všech bodů řady již není stálá, ale mění se tak, že v každém okamžiku se k ní přičítá okamžité výchylka kmitavého pohybu. Délka vlny je zde charakterizována jedním zředěním a jedním zhuštěním. Okamžitá výchylka je matematicky popsána stejně jako v případě příčného vlnění, tedy vztahy 3.1 - 3.6. Je nutné si však uvědomit, že přenášení rozruchu při podélném vlnění je podmíněno tlakovými silami. Tyto síly se mohou vyskytovat v látkách všech skupenství. Přenášení kmitů při příčném vlnění je zprostředkováno tečnými (smykovými) silami, které mohou existovat jen v látkách pevných. Jinak řečeno, v pevných látkách se mohou šířit oba druhy vlnění, zatímco v tekutinách (kapaliny a plyny) se může šířit pouze vlnění podélné. Rychlost vlnění závisí na druhu vazby. Čím je vazba „těsnější“, tím je vlnění rychlejší.

Je nutné si ještě uvědomit, že jsme zatím psali pouze o rychlosti vlny (rovnice 3.1), tedy $v=f\lambda$, Rychlost vlny však není rychlostí s jakou kmitá libovolný bod v řadě, ať už se jedná o příčné či podélné vlnění (tedy bod kmitá buď kolmo na směr šíření vlny, nebo ve směru šíření vlny). Tato rychlost je stejná jako v rovnici 2.5, tedy maximální hodnota $v_{max}=\omega A$.

3.2.3 Šíření rovinné vlny

Nyní určíme tvar rovnice vystihující šíření vlnění (rovinné vlny) v prostoru. Rovinná vlna se může v kartézské soustavě souřadnic (x, y, z) šířit v obecném směru. Trochu si situaci zjednodušíme, když řekneme, že rovinná vlnoplocha je kolmá k rovině xz a její směr šíření je dán vlnou, která svírá s osou x úhel α.(viz obr. 3.2.3). Uvažujme dále, že vlnoplocha je v čase t=0 v poloze (1) a za čas τ se rozšíří v daném směru do polohy (2), přičemž prochází bodem P na ose x.



Obrázek 3.2.3: Příklad rovinné vlnoplochy kolmé k rovině xz.

Určitý bod P vlnoplochy je dán polohovým vektorem:

$$r = ix \quad . \tag{3.7}$$

Směr šíření vlnoplochy můžeme charakterizovat jednotkovým vektorem rychlosti $\boldsymbol{v^0}$. Vlnoplochu v bodě P lze tedy popsat rovnicí

$$y = A \sin \omega (t - \tau) \quad . \tag{3.8}$$

kde τ je potřebná doba k tomu, aby se vlnoplocha rozšířila z jedné polohy do druhé, přičemž urazila dráhu s vyjádřitelnou skalárním součinem vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}^0$:

$$s = r v^0 = r \cos \alpha \quad . \tag{3.9}$$

Čas τ je pak dán jako

$$\tau = \frac{s}{v} = \frac{r v^0}{v} = \frac{r \cos \alpha}{v} \quad . \tag{3.10}$$

Dosadíme-li vztah 3.10 do rovnice 3.8 dostáváme výraz

$$y = A \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{v} r v^0 \right) \quad . \tag{3.11}$$

Je zřejmé, že ω/v je $2\pi/\lambda$ a že směr šíření vlnoplochy můžeme podobně jako v 3.5 vyjádřit **vlnovým vektorem**

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}v^0 \quad . \tag{3.12}$$

A konečně lze napsat rovnici pro vlnoplochu

$$y=A\sin(\omega t-kr) \quad . \tag{3.13}$$

3.3 Vlnová rovnice

Dosud jsme uvažovali pouze vlnění sinusového průběhu, které jsme popsali rovnicemi 3.3 - 3.5. Obecně však může bod řady konat naprosto obecné kmity, například může opisovat Lissajoussovy obrazce. Počáteční rozruch může tedy mít jakýkoliv průběh a ostatní body řady pak prostřednictví vazby konají kmity stejného průběhu s určitým zpožděním a vzniklé vlnění lze popsat obecnou rovnicí

$$y(x,t)=f\left(t\pm\frac{x}{v}\right) \quad . \tag{3.14}$$

Znaménko ± znamená, že vlnění se může šířit v jak v kladném směru, tak i v záporném směru osy x. Vztah 3.14 lze považovat za řešení obecné diferenciální rovnice, nebo-li **vlnové rovnice**, kterou si zde uvedeme bez odvození:

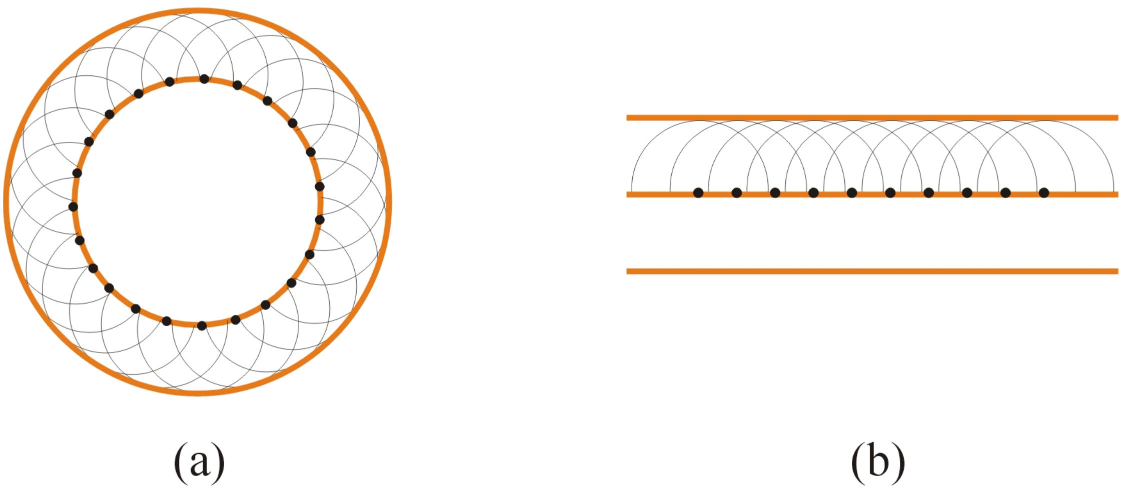
$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} \quad . \tag{3.15}$$

Rovnice 3.15 je vlastně pohybovou rovnicí pro vlnění pro šíření vlny v bodové řadě.

3.4 Huygensův princip

Christiaan Huygens (1629-1695), který byl téměř současníkem *Issaca Newtona* (1643-1727), vyslovil hypotézu, která je dodnes v klasické mechanice platná a experimentálně dokazatelná pro všechny druhy vlnění. Huygensův princip (viz obr. 3.4.1) zní:

Vlnění se šíří prostorem tak, že všechny body, do nichž vlnění dospěje, lze považovat za bodové zdroje elementárního vlnění, které se kolem každého bodu rozšíří na elementární vlnoplochy. Nová výsledná vlnoplocha je pak obálkou všech elementárních vlnoploch ve směru šíření vlnění.



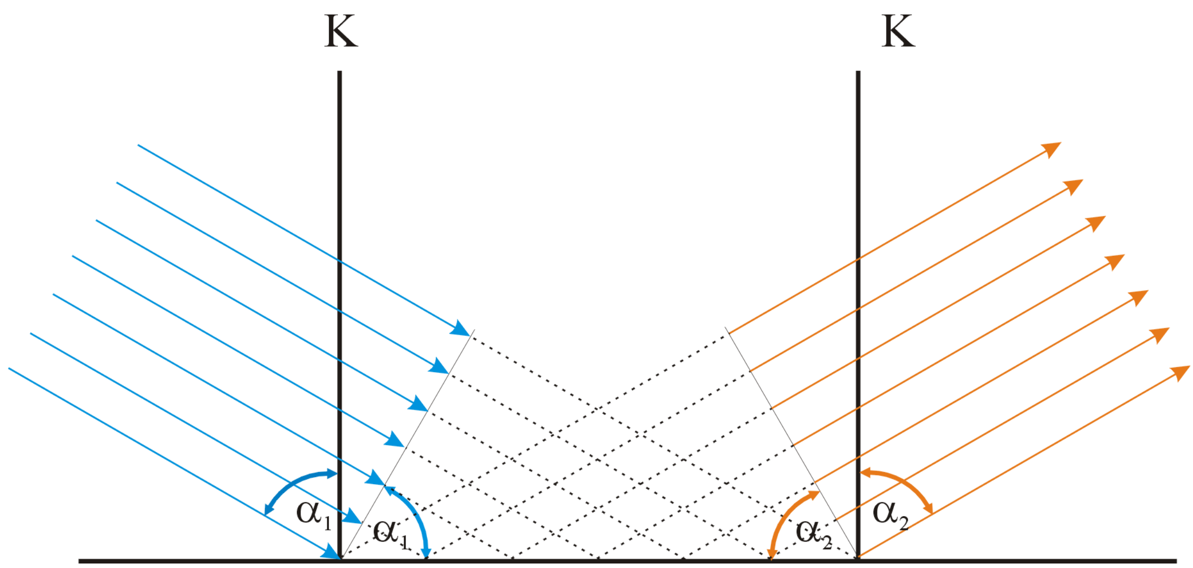
Obrázek 3.4.1: Konstrukce (a) kulové vlny a (b) rovinné vlnoplochy.

3.5 Odraz a lom vlnění

Pomocí Huygensova principu teď odvodíme zákon odraz a zákon lomu při dopadu rovinné vlny na rozhraní dvou prostředí.

3.5.1 Odraz vlnění

Předpokládejme, že na rozhraní dvou prostředí dopadá rovinná vlnoplocha, jejíž směr je určen úhlem dopadu α_1 a vlnění se šíří rychlostí v_1 (viz obr. 3.5.1).



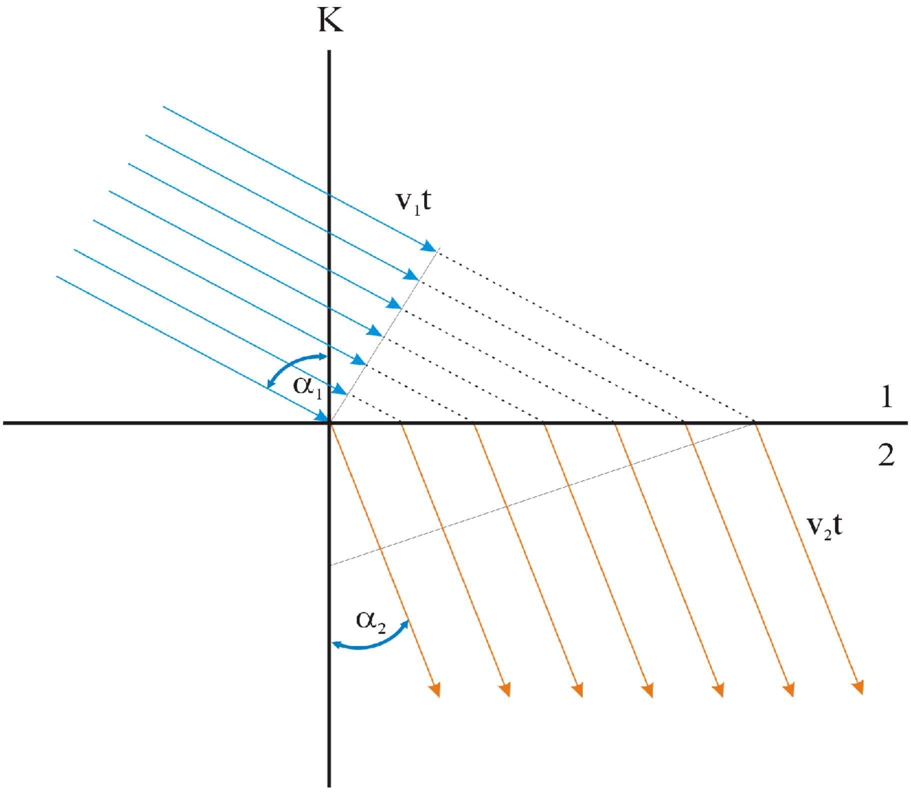
Obrázek 3.5.1: Odraz rovinné vlnoplochy.

Zákon odrazu zní: **Úhel dopadu α_1 měřený od kolmice dopadu se rovná úhlu odrazu α_2**, tedy

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad . \tag{3.16}$$

3.5.2 Lom vlnění

Nyní předpokládejme opět rovinnou vlnoplochu šířící se ve směru paprsků rychlostí v_1 na rozhraní dvou prostředí (viz obr. 3.5.2).



Obrázek 3.5.2: Lom rovinné vlnoplochy.

Nyní platí známý vztah nazývaný Snellův zákon lomu: **Poměr sinu úhlu dopadu k sinu úhlu lomu je roven poměru fázových rychlostí vlnění v obou prostředích**, tedy

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad . \tag{3.17}$$

Je-li rychlost šíření vlny v prvním prostředí větší než rychlost v druhém prostředí, tedy $v_1 > v_2$, pak $\alpha_1 < \alpha_2$ a jde o lom vlnění ke kolmici. Je-li rychlost šíření vlny v prvním prostředí menší než rychlost v druhém prostředí, tedy $v_1 < v_2$, pak $\alpha_1 > \alpha_2$ a jde o lom vlnění od kolmice.

V případě lomu od kolmice může nastat mezní případ, kdy úhel lomu $\alpha_2 = \pi/2$, pak jeho sinus je roven jedné a pro úhel dopadu pak platí

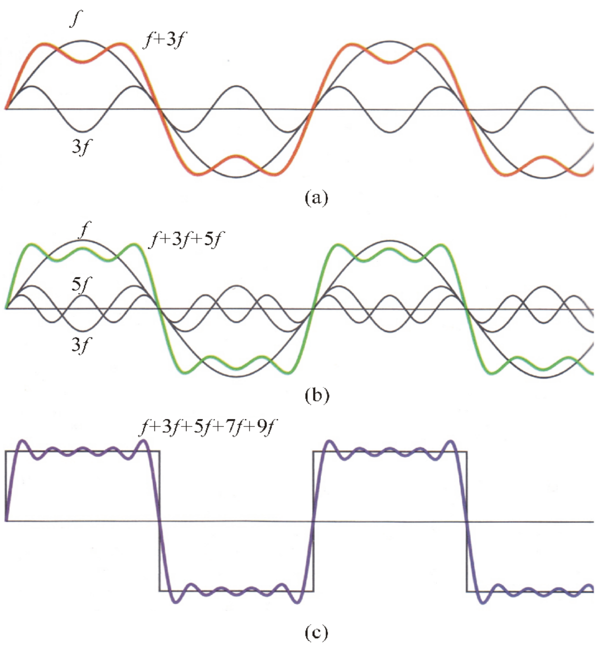
$$\sin\alpha_1 = \frac{v_1}{v_2} < 1 \quad . \tag{3.18}$$

Úhel α_1 pak nazýváme **mezním úhlem** α_m a je to největší úhel dopadu, pro který kromě odrazu nastává také lom. Pro úhly větší než α_m nastává úplný odraz (totální reflexe).

3.6 Skládání vln

Podobně jako u kmitů i zde platí princip superpozice: **Výchylky dvou překrývajících se vln se algebraicky sčítají a vytvářejí jednu výslednou vlnu a současně se překrývající vlny při svém postupu neovlivňují.**

Studiu superpozice vln se věnoval francouzský matematik *Jean Baptiste Fourier* (1786-1830), který také ukázal, že libovolnou složenou vlnu lze vyjádřit ve tvaru součtu většího počtu sinusových vln, pokud se vhodně zvolí jejich frekvence, amplitudy a fázové konstanty. Jinak řečeno každou jakkoliv složitou vlnu lze reprodukovat složením dostatečného počtu sinusových vln (viz obr 3.6.1).



Obrázek 3.6.1: Příklad skládání vln podle Fouriera (obrázek převzat z knihy Serway, Jewett: Physics for scientists and engineers, 6. vydání, ISBN 0-534-40842-7).

Tyto součty se nazývají **Fourierovy řady**. Obecný předpis Fourierovy řady nalezneme v každé učebnici matematiky. Uveďme si alespoň jeden předpis pro skládání goniometrických funkcí:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad , \tag{3.19}$$

kde n je celé kladné číslo. Rozpis této řady popisuje výraz:

$$y(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \ldots + A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \tag{3.20}$$