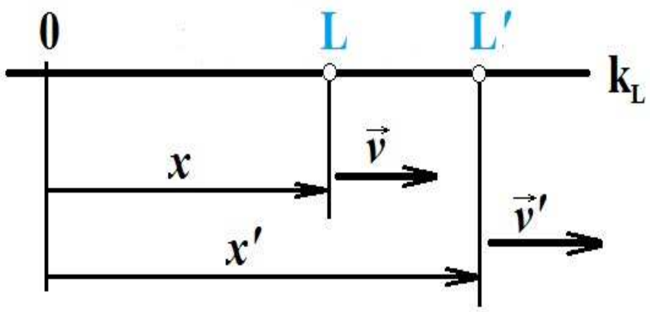
2. Kinematika bodu a tělesa

Kinematika bodu popisuje těleso nebo také ***bod,*** který se pohybuje po nějaké trajektorii, křivce nebo jinak definované dráze v závislosti na ***poloze bodu na dráze, rychlosti a zrychlení.***

POLOHA - v čase *t* je poloha bodu *L* na trajektorii (dráze) určená souřadnicí *x* od zvoleného počátku 0, který je zobrazen na obrázku č. 2.1.



Obr. 2.1: Poloha bodu v závislosti na čase na přímce

Obr. 2.2: Polohou bodu můžeme chápat také místo na Severním pólu

RYCHLOST – vyjadřuje změnu souřadnice polohy

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \qquad (2.1)$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obr. 2.3: Rychlost a její vnímání je u každého člověka zcela jedinečné

ZRYCHLENÍ – vyjadřuje časovou změnu rychlosti

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \tag{2.2}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \tag{2.3}$$

Obr 2.4: Zrychlení je ve sportu jedna z nejdůležitějších veličin pro dosažení úspěchu

V intervalu polohy ale také v intervalu času můžeme určit také střední rychlost a střední zrychlení:

STŘEDNÍ RYCHLOST - $$v_s = \frac{x' - x}{t' - t} \tag{2.4}$$

STŘEDNÍ ZRYCHLENÍ - $$a_s = \frac{v' - v}{t' - t} \tag{2.5}$$

2.1 Závislost mezi veličinami *x, v, a, t*

Mezi veličinami *x, v, a, t* existují závislosti, jejichž celkový počet je 6:

$$x = f_1\,(t)$$

$$v = f_2\,(t)$$
$$a = f_3\,(t)$$
$$v = f_4\,(x)$$
$$a = f_5\,(x)$$
$$a = f_6\,(v) \qquad (2.1.1)$$

V úlohách kinematiky je obvykle slovním zadáním určena jedna z těchto závislostí a úkolem je vyřešit závislosti ostatní nebo jen některou z nich. Je si třeba uvědomit, že pokud máme zadanou funkci polohy, tak její *derivací* získáme rychlost. Naproti tomu *derivací* rychlosti získáme zrychlení. Celkově opačný postup, který by popisoval posun od rovnice zrychlení k rychlosti a poloze je *integrace.*

$$\boldsymbol{x\ (m) \rightarrow v\ (ms^{-1}) \rightarrow a\ (ms^{-2})\ výpočetní\ postup\ DERIVACE}$$
$$\boldsymbol{x\ (m)\ \leftarrow v\ (ms^{-1})\ \leftarrow a\ (ms^{-2})\ výpočetní\ postup\ INTEGRACE}$$

2.2 Druhy přímočarého pohybu

Pohyb rovnoměrný, je-li rychlost konstantní (zrychlení nulové – $a = 0$).
Pohyb rovnoměrně zrychlený, je-li zrychlení konstantní $a \neq 0$ (pokud nastane situace, kdy je pohyb zrychlený záporný – čili se záporným znaménkem: $a = -X$ jedná se o pohyb rovnoměrně zpomalený).
Pohyb nerovnoměrně zrychlený (od začátku pohybu až do konce se pohyb náhodně zrychluje a zpomaluje).

2.3 Bod v pravoúhlém souřadnicovém systému

V pravoúhlém (kartézské) soustavě souřadnic (v našem případě se bude jednat z 99,9 % o systém pravotočivých souřadnic – nikoliv levotočivých) je pohyb určen parametrickými rovnicemi:

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t) \qquad (2.3.1)$$

Polohový vektor: $$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \qquad (2.3.2)$$

Vektor rychlosti: $$\vec{v} = \vec{v}_x\vec{\imath} + \vec{v}_y\vec{\jmath} + \vec{v}_z\vec{k} \qquad (2.3.3)$$

Kde jeho *skalární* složky jsou: $$v_x = \dot{x};\ v_y = \dot{y};\ v_z = \dot{z} \qquad (2.3.4)$$

*Velikost rychlosti** je: $$v = |\vec{v}| = \sqrt{v^{2x} + v^{2y} + v^{2z}} \qquad (2.3.5)$$

Směrové úhly jsou dány goniometrickými funkcemi, respektive směrovými kosiny (cos):

$$\cos\alpha_v = \frac{v_x}{v}; \cos\beta_v = \frac{v_y}{v}; \cos\gamma_v = \frac{v_z}{v} \qquad (2.3.6)$$

Vektor zrychlení je: $$\vec{a} = \vec{a}_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} \qquad (2.3.7)$$

Kde jsou jeho skalární složky (tak jako v případě vektoru *rychlosti*):

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x};\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y};\ \ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \qquad (2.3.8)$$

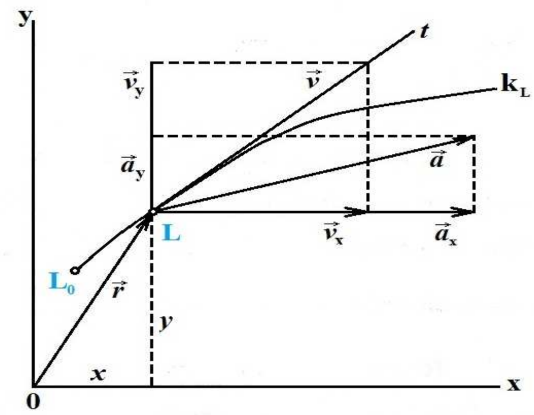
*Velikost zrychlení** je: $$a = |\vec{a}| = \sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y + a^2{}_z} \qquad (2.3.9)$$

***** jedná se o konečnou hodnotu, která je vyjádřena číslem (není zapsána vektorově ale hodnotou čísla, které je závislé na velikosti jednotlivých složek *x*, *y*, *z*, ze kterých se skládá). Pokud budou složky pouze *x*, *y*, tak hodnoty jednotlivých složek jsou pod odmocninou složeny v následujícím tvaru: $\sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y}$.

Směrové úhly jsou dány goniometrickými funkcemi - směrovými kosiny (cos):

$$\cos\alpha_a = \frac{a_x}{a};\ \cos\beta_a = \frac{a_y}{a};\ \cos\gamma_a = \frac{a_z}{a} \qquad (2.3.10)$$

Následující schéma zobrazuje jednotlivé složky, které jsou přítomny při sestavení *polohy*, *rychlosti a zrychlení* v rovině *x*, *y*.



Obr. 2.5: Složky polohy bodu, rychlosti a zrychlení

2.4 Druhy křivočarého pohybu

Druhy křivočarého pohybu se dělí dle *tečného zrychlení*, a rozdělují se následujícím způsobem.

Je-li $a_t = 0$, tj. $v = konst.$, jde o *pohyb rovnoměrný.*

Je-li $a_t = konst. \neq 0$, jde o *pohyb rovnoměrně zrychlený* nebo *pohyb rovnoměrně zpožděný* (opět pokud vyjde $a_t = mínusová\ hodnota$).

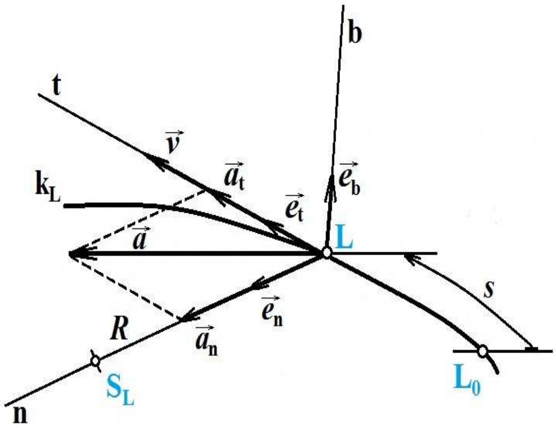
Je-li $a_t \neq konst.$, jde o *pohyb nerovnoměrný.*

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE · esf · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost · Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Hlavní osy jsou *tečna, hlavní normála a binormála křivky:*



2.6: Složky polohy, rychlosti a zrychlení bodu na křivce

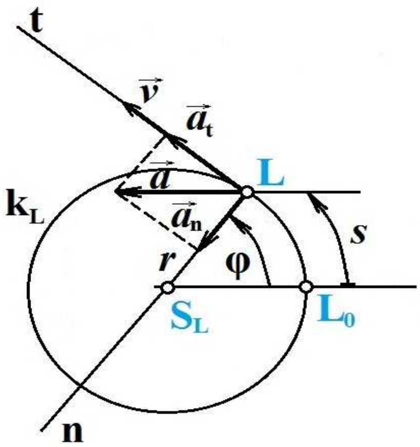
Bod L se pohybuje po křivce k_L a polohu bodu určuje křivočará souřadnice (oblouková souřadnice, odlehlost) s od zvoleného počátku L_0. Tato souřadnice je funkcí času:

$$s = s(t) \qquad (2.4.1)$$

Vektorový tvar rovnice křivky je: $$r = r(t) \qquad (2.4.2)$$

2.5 Pohyb bodu po kružnici

Pohyb bodu po kružnici je zvláštní případ křivočarého rovinného pohybu bodu. Trajektorií bodu L je kružnice k_L se středem $S_{L.}$ Spojnice $\overline{S_L L}$ se nazývá průvodič bodu L (na následujícím obrázku č……). Pohyb bodu L po kružnici k_L je určen pohybem jeho průvodiče.



2.7: Složky polohy, rychlosti a zrychlení bodu na kružnici

Úhel φ je funkcí času: $$\varphi = \varphi(t) \qquad (2.5.1)$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úhel φ se také nazývá *úhlová souřadnice* přímky.

Časová změna tohoto úhlu je tzv. *úhlová rychlost* a je dána vztahem:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \qquad (2.5.2)$$

Úhlové zrychlení vyjadřuje časovou změnu úhlové rychlosti a je dáno vztahem:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}\ [s^{-1}] \qquad (2.5.3)$$

nebo lze také napsat:
$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{d(\omega^2)}{2d\varphi} \qquad (2.5.4)$$

V přirozených souřadnicích, které popisují pohyb po křivkách je křivočará souřadnice popsána následující rovnicí a jedná se také o dráhu na křivce nebo kružnici:

$$s = r\,(\varphi)\ [m] \qquad (2.5.5)$$

Rychlost na křivce nebo kružnici lze potom obdobně pomocí předchozího vztahu popsat:

$$v = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\varphi)}{dt} = r\,\frac{d\varphi}{dt} = r\omega\ [ms^{-1}] \qquad (2.5.6)$$

Tečné zrychlení:
$$a_t = \dot{v} = \ddot{s} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\,\frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon\ [ms^{-2}]$$
(2.5.7)

Normálové zrychlení:
$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega^2)}{r} = r\omega^2\ [ms^{-2}] \qquad (2.5.8)$$

Celkové zrychlení:
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}\ [ms^{-2}] \qquad (2.5.9)$$

2.6 Kinematika tělesa

Kinematika tělesa – poloha tuhého tělesa v prostoru je určena polohou tří náležících bodů neležících na jedné přímce ale volně rozmístěných po povrchu. Protože jsou u každého takového bodu dány 3 souřadnice (x, y, z), jde tedy o celkem devět souřadnic, které musí současně splňovat tři podmínky tuhosti tělesa. Podmínky tuhosti lze potom napsat následujícím způsobem:

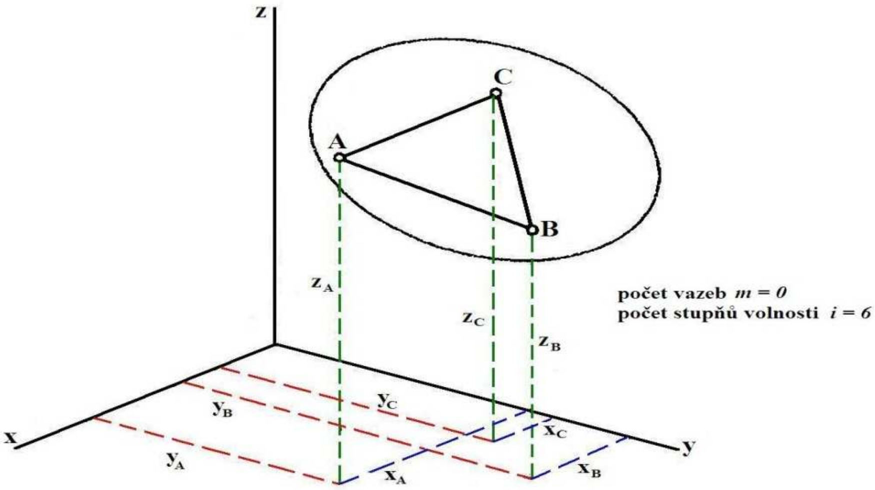
$$\overline{AB} = kosnt.;\ \overline{BC} = konst.;\ \overline{CA} = kosnt. \qquad (2.6.1)$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Těmito podmínkami jsou vázány souřadnice tří bodů tělesa, a proto poloha volného tělesa v prostoru je určena šesti na sobě nezávislými souřadnicemi. Volné těleso má tedy 6 stupňů volnosti, jak je zobrazeno na následujícím obrázku 2.8:



2.8: Volné těleso se 6stupni volnosti

Těleso může vykonávat jednak rovinný ale také prostorový pohyb. Mezi rovinné pohyby vykonané tělesem patří:

1. Posuvný (translační)
2. Otáčivý (rotační)
3. Obecný

Naproti tomu prostorový pohyb může být:

1. Posuvný (translační)
2. Sférický
3. Obecný

Jednotlivé body tělesa při jeho pohybu opisují křivky nebo dráhy a mají různé rychlosti a zrychlení. Některé kinematické veličiny jsou společné pro všechny body tělesa. Posuvný a rotační pohyb jsou základní pohyby tělesa a všechny ostatní pohyby lze z těchto pohybů složit.

2.6.1 Posuvný pohyb tělesa

Těleso koná *posuvný pohyb*, jestliže dvě jeho nerovnoběžné přímky nemění při pohybu svůj směr. Z této definice vyplývá, že při posuvném pohybu nemění svůj směr žádná přímka tělesa.
U posuvného pohybu tělesa platí stejná pravidla jako u pohybu bodu co se týče polohy, rychlosti a zrychlení. Jedná se hlavně o polohový vektor, vektor rychlosti a vektor zrychlení.
Pokud budeme uvažovat polohový vektor $\overrightarrow{r_{L\Omega}}$ je na tělese stálý co do velikosti i směru. Proto jsou trajektorie bodů tělesa *shodné*, navzájem *posunuté křivky*.

$$\overrightarrow{r_L} = \overrightarrow{r_{L\Omega}} + \overrightarrow{r_\Omega} \qquad (2.6.2)$$

Pokud výše uvedený vztah derivujeme podle času, tak jak jsme si uvedli v kapitole 2.1, tak dostaneme následující výsledek:

$$\dot{\overrightarrow{r_L}} = \dot{\overrightarrow{r_{L\Omega}}} + \dot{\overrightarrow{r_\Omega}} \qquad (2.6.3)$$

Je-li trajektorií bodu L tělesa přímka, nazýváme pohyb *přímočarý posuvný pohyb*, je-li trajektorií bodu L rovinná nebo prostorová křivka, nazýváme pohyb *rovinný posuvný* nebo *prostorový posuvný pohyb.*

2.6.2 Rotační pohyb tělesa

Těleso koná *rotační pohyb*, jestliže zůstává jedna jeho přímka trvale v klidu. Tato přímka je *osou rotace o.* Rotařní pohyb se nazývá také *otáčivý pohyb.*

Rotační pohyb je určen časovým průběhem úhlu φ $(průvodičem)$, který svírá průvodič bodu L s pevnou referenční přímkou p základního prostoru čili funkcí :

$$\varphi = \varphi\ (t) \qquad (2.6.4)$$

Derivace tohoto úhlu podle času je *úhlová rychlost:*

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\ (s^{-1})$$

(2.6.5)

Derivace úhlové rychlosti podle času je *úhlové zrychlení:*

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}\ (s^{-2}) \qquad (2.6.5)$$

Úhlová rychlost vystihuje časovou změnu úhlu pootočení, *úhlové zrychlení* pak časovou změnu úhlové rychlosti.

Úhlové zrychlení lze vyjádřit ve tvarech:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega d\omega}{d\varphi} = \frac{d(\omega^2)}{2d\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad (2.6.6)$$

Veličiny *úhlová rychlost a úhlové zrychlení* jsou pro všechny body tělesa stejné a jsou to tedy *kinematické veličiny tělesa.*

Mezi kinematickými veličinami rotačního pohybu tělesa a přímočarého pohybu bodu je přímá analogie, kde si odpovídají příslušné veličiny:

$$\varphi\ [rad] \sim s\ [m];$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE · esf · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost · Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\omega\ [rads^{-1}] \sim v\ [ms^{-1}]$$
$$\varepsilon[rad.s^{-1}] \sim a\ [ms^{-2}] \qquad (2.6.7)$$

Je zřejmé, že i rotační pohyb můžeme nazývat rovnoměrný, když je úhlová rychlost $\omega = konst.$, rovnoměrně zrychlený nebo zpožděný, je-li úhlové zrychlení $\varepsilon = konst\ \neq 0$. Obecně se jedná o pohyb nerovnoměrně zrychlený.
V technických aplikacích se často místo úhlové rychlosti zavádí veličina *počet otáček za minutu* n_m nebo *počet otáček za sekundu* n_s *(frekvence otáčení).*

Mezi těmito veličinami platí převodní vztah:

$$\omega = \frac{2\pi n_m}{60} = \frac{\pi n_m}{30} = 2\pi n \qquad (2.6.8)$$

Mezi veličinami rotačního pohybu můžeme opět vytipovat šest závislostí (stejně jako u přímočarého pohybu):

$$\varphi = f_1\ (t)$$
$$\omega = f_2\ (t)$$
$$\varepsilon = f_3\ (t)$$
$$\omega = f_4\ (\varphi)$$
$$\varepsilon = f_5\ (\varphi)$$
$$\varepsilon = f_6\ (\omega) \qquad (2.6.9)$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ