

3. Obecný rovinný pohyb tělesa

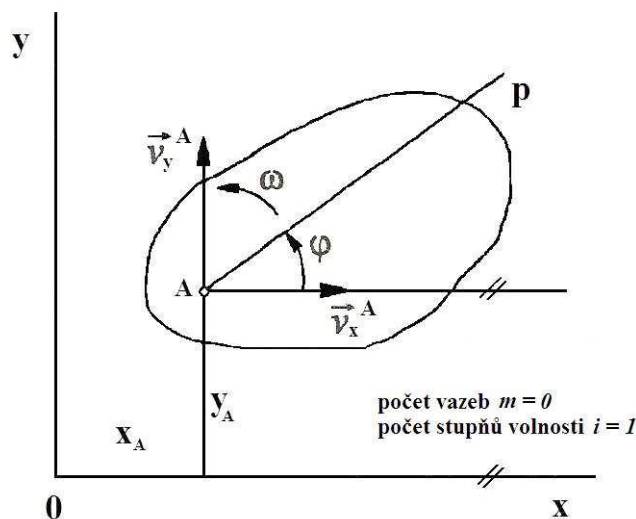
Při obecném rovinném pohybu tělesa leží dráhy jeho jednotlivých bodů navzájem rovnoběžných rovinách. Těmito dráhami jsou obecně rovinné křivky. Všechny body ležící na téže kolmici k rovině pohybu shodné křivky a mají v každém okamžiku shodné rychlosti a shodné zrychlení. Některou z rovin pohybu volíme za základní - nazýváme ji *hybná rovina* - dle ní těleso promítneme a místo trojrozměrného tělesa vyšetřujeme pohyb plošného útvaru v rovině (v tomto případě je zjednodušeně popsán přechod z 3D na 2D).

3.1 Těleso volné - počet stupňů volnosti a vazby

Poloha volného tělesa v rovině je určena třemi nezávislými souřadnicemi, tj. dvěma souřadnicemi některého bodu A a úhlem φ , který svírá libovolná přímka p tělesa s rovnoběžnou osou x souřadnicové soustavy. Tyto tři nezávislé souřadnice určují 3 stupně volnosti tělesa, které není nijak vázáno k základnímu rámu (obráz. 3.1). Rámem označujeme základní nepohyblivé těleso.

Vazbová závislost těles v rovině je dána vztahem:

$$i = 3 - m \tag{3.1}$$



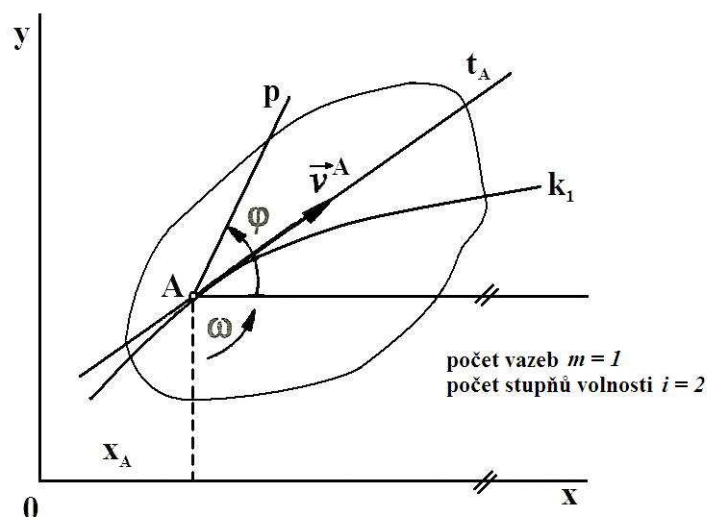
Obr. 3.1: Možné stupně volnosti

Je-li těleso 2 vázáno jedním bodem A ke křivce k_1 pevného tělesa 1, můžeme se pohybovat v rovině tak, že bodem A se můžeme posouvat ve směru čny t_A ke křivce k_1 a nezávisle o to se můžeme otáčet kolem tohoto bodu. Poloha takto vázaného tělesa je určena dvěma navzájem nezávislými souřadnicemi, například jednou souřadnicí bodu A a úhlem libovolné přímky p . Druhá souřadnice bodu A je vázána rovnicí křivky k_1 (obráz. 3.2). Tato vazba se nazývá *obecná kinematická dvojice*.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

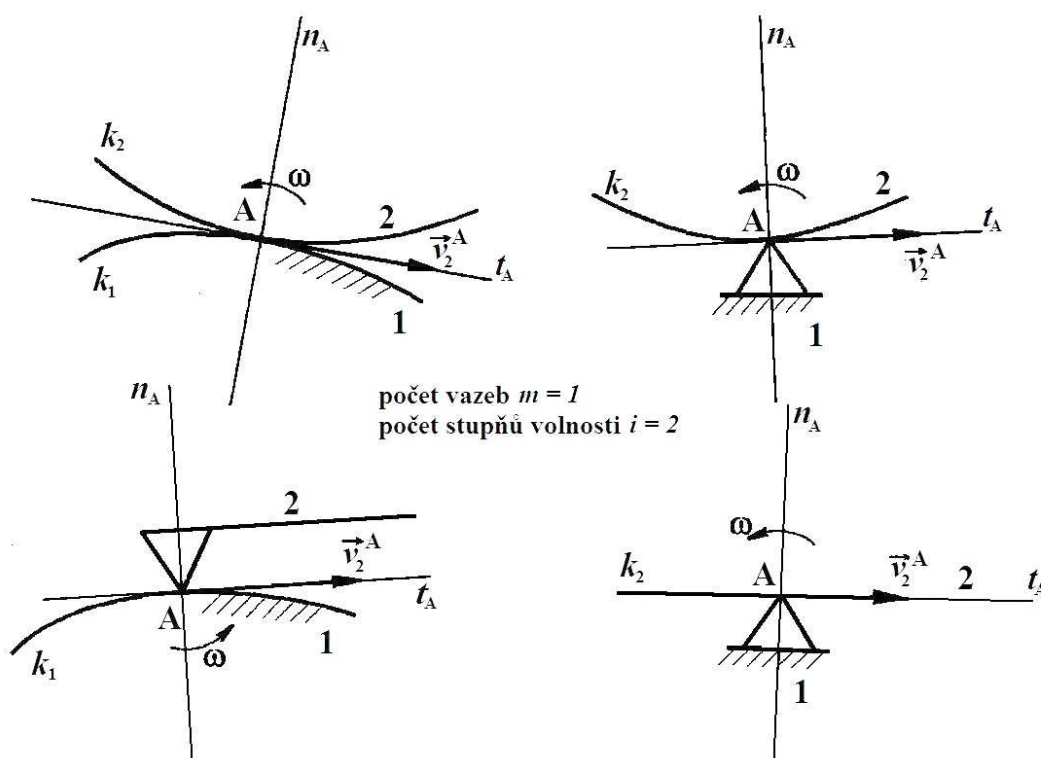


INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr.3.2: Obecná kinematická dvojice

Prakticky je vazba realizována například dvěma křivkami k_2 a k_1 , kdy jsou tyto křivky v bodě A vtrvalém dotyku. Z hlediska pohybu je v tomto případě zabráněn posuv v směru kolmém ke společné tečně v dotykovém bodě. Proto tato vazba odnímá jeden stupeň volnosti. Další varianty, kdy jedna křivka přelapává druhou nebo bod jsou na následující obrázku.



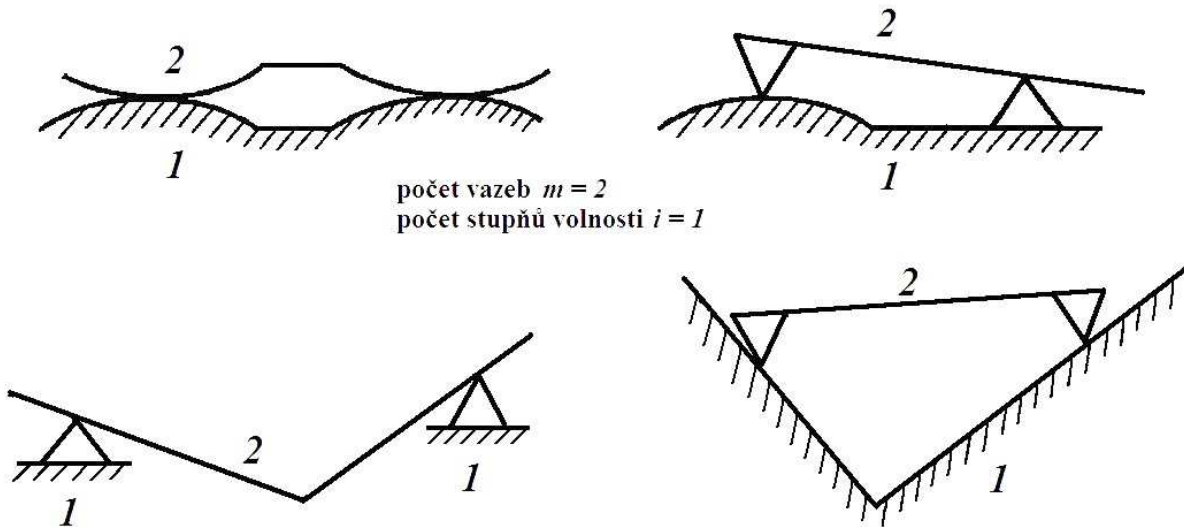
Obr.3.3: Kinematické dvojice

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky



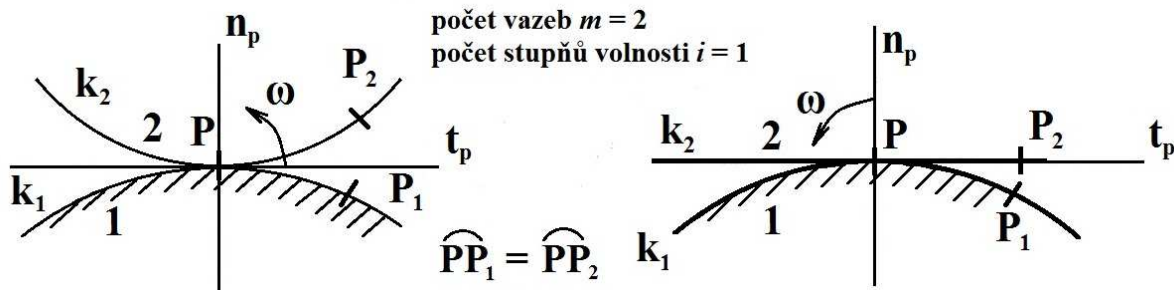
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Je-li těleso 2 takto vázáno ve dvou místech k tělesu 1, jsou těleso 2 odňaty celkem dva stupně volnosti.



Obr.3.4: Jiné obecné kinematické dvojice

Je-li vázba tvořena dvěma řivkami k_1 a k_2 , které se mohou posobit navzájem odvalovat, je zabráněno posuvu v směru čny normály v dotykovém bodě P . Tím jsou těleso 2 odňaty dva stupně volnosti a toto těleso může pouze rotovat kolem bodu P , takže má jeden stupeň volnosti.



Obr.3.5: Odvalující se dvě tělesa

Jedna-li se soustava dvou členů ($n=2$), má soustava 3 stupně volnosti. Podle toho, jak jsou sobě tyto členy vázány, může být celkový počet stupňů volnosti soustavy. Každá vazba dvou těles odebrává určitý počet stupňů volnosti. Vlastní spojení dvou těles umožňující vzájemný pohyb nazýváme kinematické dvojice.

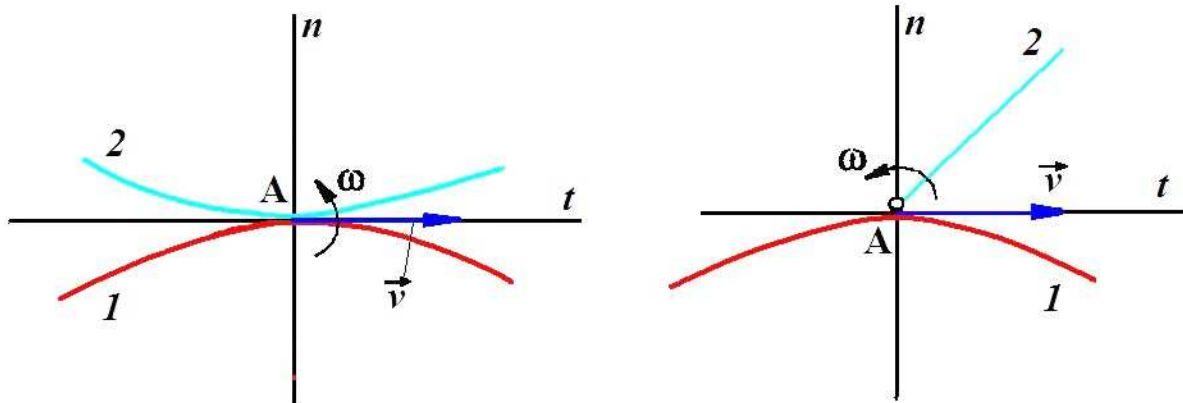
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Kinematická dvojice obecná

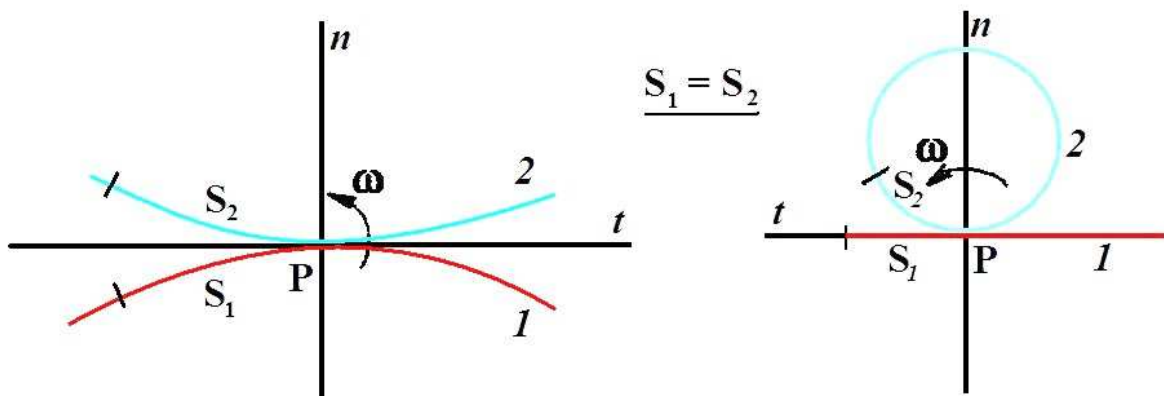
je realizovaná stykem dvou křivek (obr. 3.6), které se mohou po sobě smýkat. Tato vazba zabraňuje pohybu ve směru normály v dotykovém bodě, umožňuje pohyb ve směru tečny a otáčení kolem dotykového bodu. Odebíráte dý soustavě jeden stupeň volnosti.



Obr.3.6: Obecná kinematická dvojice „styku“ dvou křivek

Kinematická dvojice valivá

je podobná obecné kinematické dvojici, avšak stýkající se křivky obou členů soustavy se nemohou po sobě smýkat. Tyto křivky se mohou pouze vzájemně odvalovat, tj. v daném okamžiku otáčejí kolem dotykového bodu. Tato vazba tedy odebírá soustavě 2 stupně volnosti, protože zabráňuje pohyb ve směru normály i tečny v dotykovém bodě (obr.3.7).



Obr.3.7: Kinematická dvojice valivá (nesmýkají se)

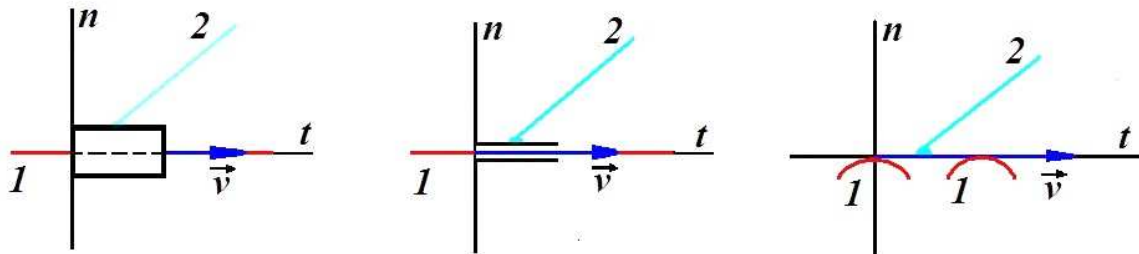
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Kinematická dvojice posuvná

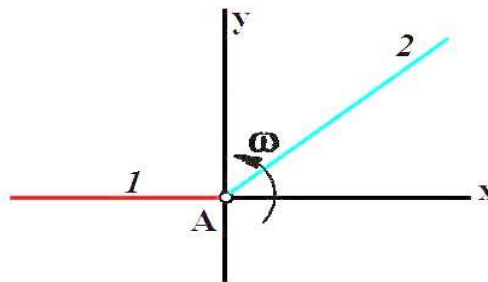
umožňuje vzájemný posuvný pohyb např. přímočarý ve směru t , ale zabráňuje pohybu ve směru normály n a též rotaci vhybné rovině. Tuto posuvnou kinematickou dvojici lze nahradit dvěma obecnými kinematickými dvojicemi. Vazba tohoto druhu odebírá soustavě 2 stupně volnosti (obr.3.8).



Obr.3.8: Kinematická dvojice posuvné (3 základní případy)

Kinematická dvojice rotační

umožňuje pouze vzájemnou rotaci kolem stálé osy a umožňuje pohyb ve dvou směrech např. X a Y . Tato kinematická dvojice odebírá soustavě 2 stupně volnosti a nazýváme jí kloub (obr.3.9).



Obr.3.9: Kinematická dvojice vytvořená prostřednictvím kloubového spoje

Počet stupňů volnosti rovinné soustavy n pohyblivých členů, které jsou spolu vázány kinematickými dvojicemi, je dán strukturálním vztahem:

$$i = 3n - 2(r + p + v) - o, (3.2)$$

kde je r - počet kinematických dvojic rotačních,
 p - počet kinematických dvojic posuvných,
 v - počet kinematických dvojic valivých,
 o - počet kinematických dvojic obecných.

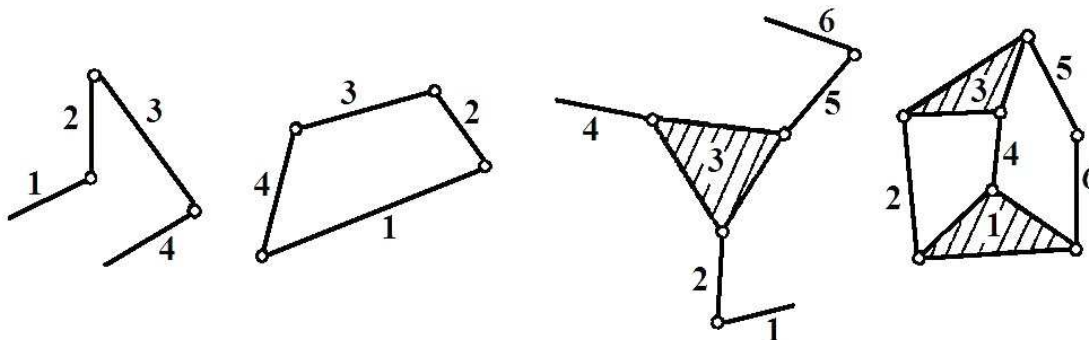
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky



Kinematický řetězec je soustava n členů, u kterého je každý člen spojen alespoň s jedním dalším členem kinematickou dvojicí.

Uzavřený kinematický řetězec

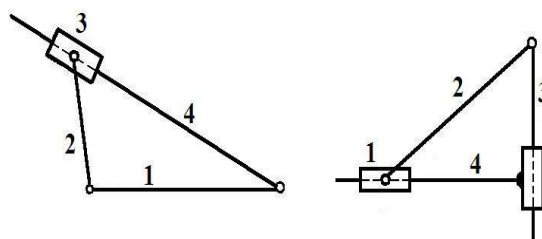
je takový, u něhož je každý člen spojen alespoň s dvěma dalšími členy (jinak je otevřený - obr. 3.10)



Obr. 3.10: Uzavřený kinematický řetězec

Rovinný kinematický řetězec

nuceného pohybu je uzavřený kinematický řetězec, který má počet stupňů volnosti $i=4$ (obr. 3.11)



Obr. 3.11: Kinematický řetězec uzavřený

Kinematický řetězec s jedním pevným členem, nazvaným rámem, (obr. 3.12 a 3.13), má počet stupňů volnosti:

$$i = 3(n - 1) - 2(r + p + v) - o, \quad (3.3)$$

Nepohyblivý člen (rám) označujeme číslem 1.

Pokud máme soustavu, která je tvořena r různými kinematickými dvojicemi a její celkový počet stupňů volnosti udává výsledek $i=1$, konají všechny členy v této soustavě jednoznačné pohyby vzhledem k pevnému členu a nazývají se **mechanismus**. Pohyby celé soustavy jsou dány jedním členem, který nazýváme **hnací člen** (obr. 3.13).

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

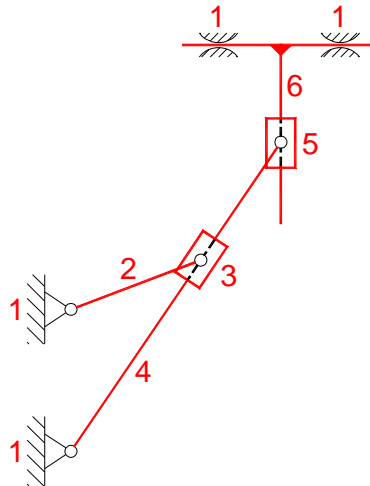


Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

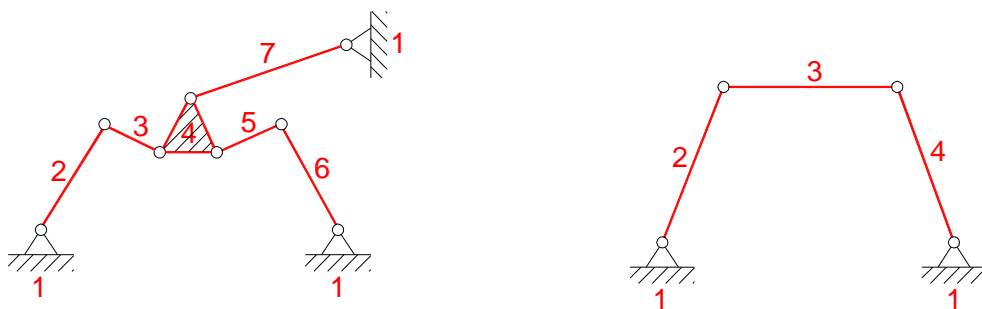
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pokud jsou výsledky kinematických dvojic celá čísla, znamenají pro mechanismus toto:

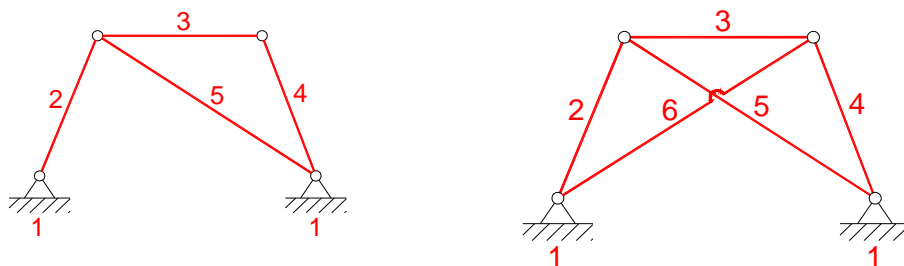
1. $i=1$ (soustava tvoří jednoznačně pohyblivý mechanismus)
2. $i \leq 0$ (soustava netvoří jednoznačně pohyblivou soustavu)
3. $i \geq 2$ (soustava vykonává více pohybů odpovídající počtu stupňů volnosti a tento mechanismus nazývá diferenciální stroj)



Obr.3.12: Soustava vykonávající jednoznačně pohyby ($i=1$)



Obr.3.13: Soustava vykonávající více pohybů ($i=2$)



Obr.3.14: Soustava nepohyblivá ($i \leq 0$)

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

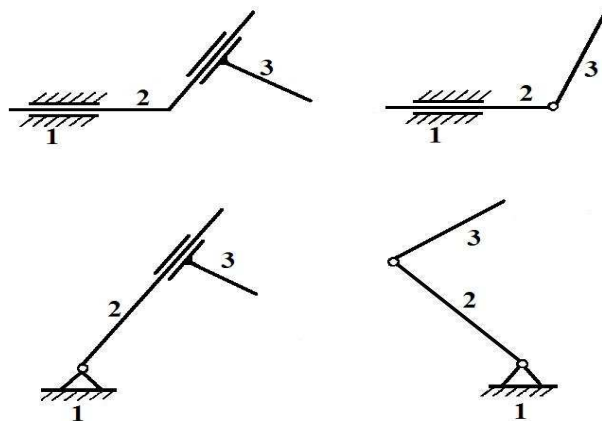


INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3.2 Teorie současných pohybů

Základními pohyby tělesa v rovině jsou pohyb posuvný a pohyb přímočarý. Složením dvou současných základních pohybů lze získat výsledný složitější pohyb útvaru.

Označíme-li v soustavě tělesa čísly 1, 2, 3 a těleso 1 bude rámem (obr. 3.15), bude pohyb tělesa 3 vzhledem k tělesu 1 pohybem složeným ze dvou současných pohybů tělesa 3 vzhledem k tělesu 2 a tělesa 2 vzhledem k tělesu 1.



Obr. 3.15: Značení současných pohybů

Pohyb tělesa 3 vzhledem k tělesu 2 nazýváme *pohyb relativní*,
 Pohyb tělesa 2 vzhledem k tělesu 1 nazýváme *pohyb nášivý*,
 Pohyb tělesa 3 vzhledem k tělesu 1 nazýváme *pohyb výsledný*.

Někdy také nazýváme pohyb relativní jako druhotný, a nášivý jako prvotní a výsledný pohyb označujeme jako absolutní.

Pro zápis skládání pohybů zavádíme tyto symbolické označení:

- pohyb relativní 3,2
- pohyb nášivý 2,1
- pohyb výsledný 3,1

Proto bude platit v našem případě daným označením těles tento symbolický zápis pro výsledný pohyb 3,1 složený ze dvou současných pohybů 3,2 a 2,1:

$$3,1 = 3,2 + 2,1$$

3.3 Kinematika mechanismů

Nyní si definujeme význam některých pojmů a definice *kinematiky* mechanismů:

1. Soustava vzájemně vázaných těles jedním pevným členem (rámem) m ůzemí tržný celkový počet stupňů volnosti. Dva členy, které se dotýkají a mohou se vzájemně pohybovat, tvoří *kinematickou dvojici*. Pod tímto pojmem rozumíme spojení obou

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky



těles tj. p řislušnou vazbu. Má-li kinematický řetězec sjedním pevným členem po čet stupňůvolnosti $i > 0$, nazýváme jej všeobecně *mechanismus*. V užším významu slova rozumíme pod pojmem *mechanismus* pohyblivou soustavu sjedním pevným členem a jedním stupněm volnosti. Soustavy, které mají po čet stupňůvolnosti $i \geq 2$, se nazývají *diferenciální ústrojí* nebo *diferenciální mechanismy (diferenciály)*.

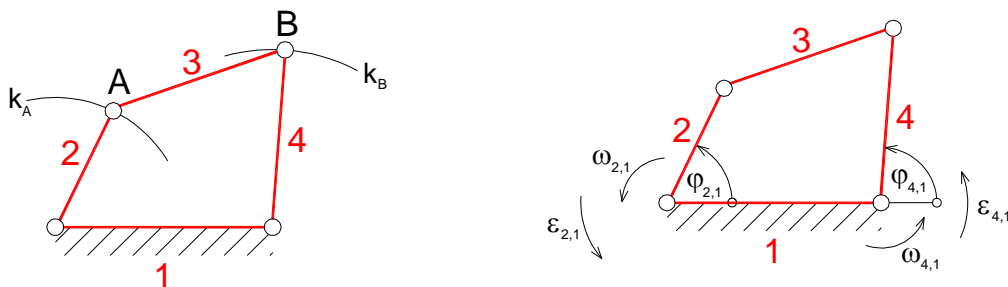
2. Mechanismy slouží k transformaci pohybu a k přenosu sil.
3. Členy, které udělují pohyb ostatním členům soustavy se nazývají *hnací členy*, a ostatní členy se nazývají *hnané*.
4. Mechanismy dle úměrnosti členů se dělí na *skonstantní převod* a na *mechanismy s nekonztantním převodem*.
5. Mechanismy lze rozdělit také na *rovinné, sférické a prostorové*.
6. Veškeré vyšetřování mechanismů zavedeme pojem *kinematické schéma*, ve kterém jsou vyznačeny členy kinematické dvojice.

3.4 Základní rovinné mechanismy

1. Čtyřčlenné mechanismy – jsou definovány počtem čtyř členů v soustavě mechanismu. Následně jsou popsány základní čtyřčlenné mechanismy, se kterými se můžeme setkat.

Kloubový mechanismus

Čtyř-kloubový. Člen 2 a také člen 4 konají vzhledem k členu pohybu 1 pohyb rotační. Podle velikosti délek se mohou otáčet v plném rozsahu 360° jako kliky nebo kývat jako váhadla. Člen 3 koná rovinný pohyb.



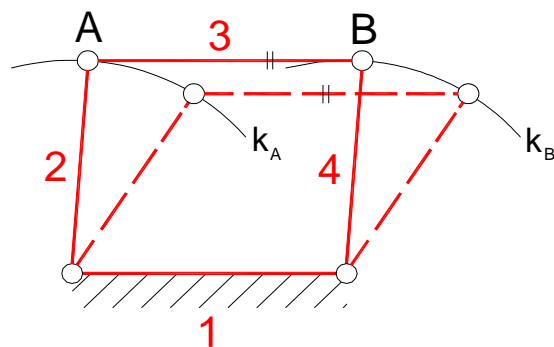
Obr.3.15: Čtyř-kloubový mechanismus

Paralelogramový mechanismus

Jedním z takových mechanismů je žedélka, kde členy 2 a 4 jsou stejné a spojují kloubů rovinně. Body A a B se pohybují po shodných křivkách (kružnicích) a člen 3 koná vzhledem k členu 1 posuvný pohyb. Člen 1 je v tomto případě definován jako rám mechanismu.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

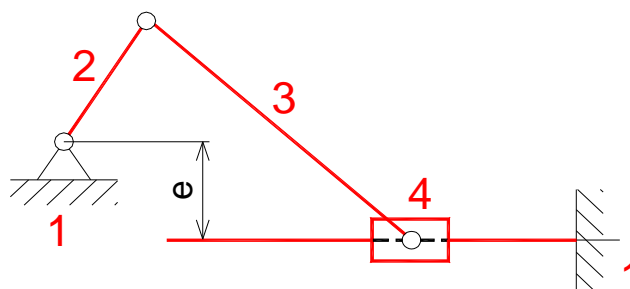




Obr.3.16: Paralelogramový čtyř-kolbovýmechanismus

Klikovýmechanismus

Vprovedení *excentrickém* ($e \neq 0$) nebo *centrickém* ($e = 0$). Člen 2 koná vzhledem k členu 1 rotačnípohybanazýváseklika. Člen 4 koná vzhledem k členu 1 posuvnýpohybanazývá se smýkadlo, k řížáknebo píst. Člen 3 koná obecný rovinný pohyb vzhledem k členu 1 a nazývá seojnice. Člen 2 m ůžebýt provedentaké jako excentr.



Obr.3.16:Klikovýmechanismus

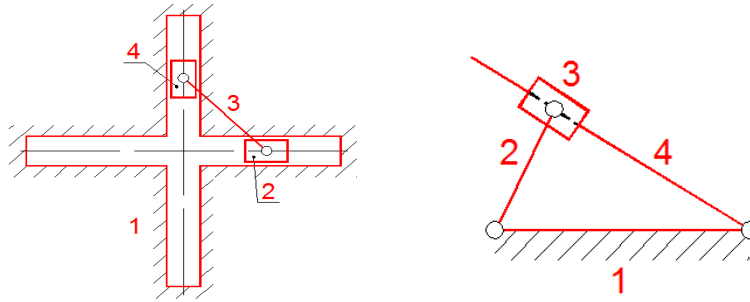
Kulisovýmechanismus

Je definovaný p ředem vázaným členem, který p ředepisuje jakousi kulisu, po které se mechanismus soustavy pohybuje. Vnašem p řípadě dráhy pro posuvný (kulisový) pohyb jednotlivých členů vnit řdrah, tak jak je na obrázku 3.17.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky



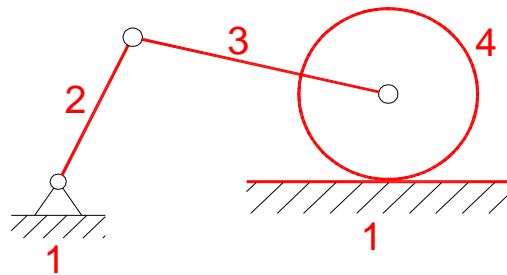
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr.3.17: Kulisový mechanismus

Valivý mechanismus

Mechanismus s valivými ojniciemi, které jsou vytvořeny pomocí dvou rámu označených 1 a jejich vzájemným pohybem v účisobě.



Obr.3.18: Valivý mechanismus

2. Trojčlenné mechanismy – jsou definovány jedním stupněm volnosti, mají jednu obecnou kinematickou dvojici a jejich počet členů v soustavě jsou tři.

Palcový mechanismus

Hnací člen může být člen 2 a hnacím člen 3. Palcový mechanismus s rotujícími členy 2 a 3 tvoří základ pro mechanismus ozubených kol. Boky zubů jsou v podstatě boky dvou spolu-pohybujících se palců.



Obr.3.19: Palcový mechanismus

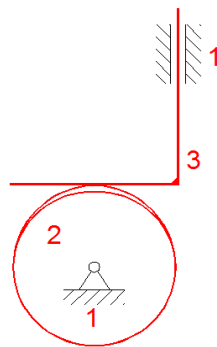
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

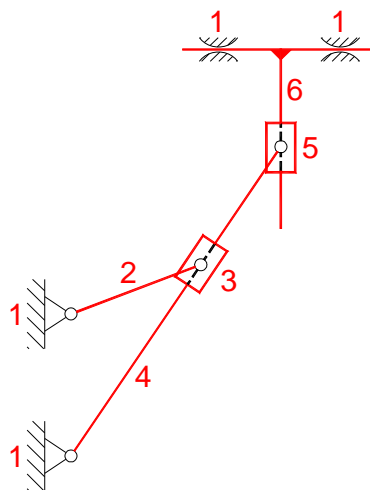
Vačkový mechanismus

Mezi trojčlenné mechanismy patří také vačkový mechanismus. Jedná se o velmi běžný mechanismus, který je využíván především v motorech pro řevodsil.



Obr.3.20: Vačkový mechanismus

3. Složený mechanismus – mechanismy svíce než čtyřmi členy jsou nazývány čtyřčlenné mechanismy. Příkladem složeného mechanismu je následující obrázek 3.21.



Obr.3.21 Složený mechanismus

3.5 Kinematické řešení mechanismů s konstantním převodem

Určování polů vzájemných pohybů členů mechanismu

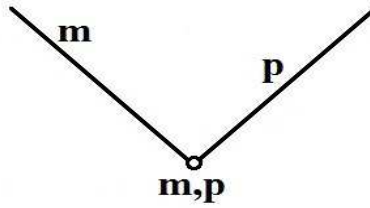
Pól pohybu dvou vzájemně vázaných členů mechanismu závisí na typu kinematické dvojice. Označíme-li spojené členy m, p , pohyb člena m vzhledem k člena p symbolicky m, p a příslušný pól pohybu také m, p je :

- u **rotační kinematické dvojice** pól pohybu m, p ve stejném místě vazby (obr. 3.22), tj. v místě kloubu

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

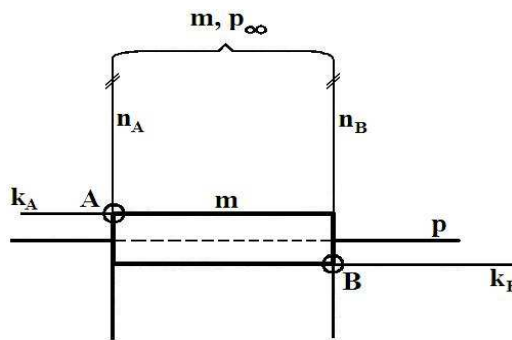


INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



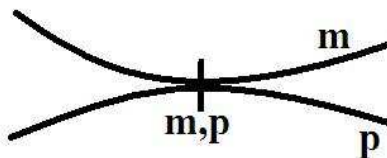
Obr.3.22: Rotační kinematická dvojice

- u **posuvné kinematické dvojice** leží pól pohybu m, p vpr úsečku normál kdrahábod ů AaB. Protože jsou tyto normály vzájemně rovnoběžné, protínají se v nekonečnu apólem je bod m, p_{∞} (obr.3.23).



Obr.3.23: Posuvná kinematická dvojice

- u **valivé kinematické dvojice** leží pól pohybu m, p v římvdotykovém bodě obou křivek, které jsou polodiemi (obr.3.24).



Obr.3.24: Valivá kinematická dvojice

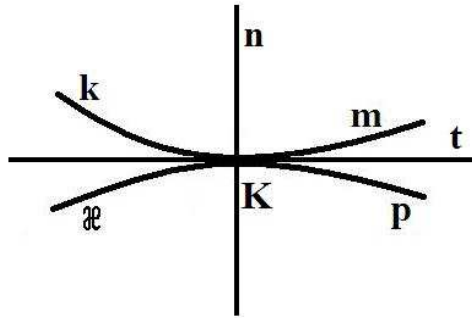
- u **obecné kinematické dvojice** leží pól pohybu m, p na společné normále n_K dotykového bodu obou křivek. Tyto křivky jsou ve vztahu výtvarné kaobálky kadotykový bod K je bodem výtvarným (obr.3.25).

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr.3.25: Obecná kinematická dvojice

Pól m , pleží vždynanormále bodut ělesamp řiuvažovaněmpohybu m, p .

Póly vzájemných pohyb ů t ěles (relativního, unášivého a výsledného) u mechaní smu lze vyšetřovat pomocí věty o poloze pól ů.

U mechanismu s n členy lze napsat $n-2$ symbolických rovnic pro složený pohyb. Nap ř. u čtyřčlenného mechanismu lze pro každý pohyb napsat dvě rovnice, které vyjad řují souvislost mezi výsledným, relativním a unášivým pohybem. Póly t ěchto pohyb ů leží na společné přímce. Hledaný pól výsledného pohybu pak leží v průsečíku dvou geometrických míst.

Při řešení polohy pól ů a také stanovení druhu vzájemných pohyb ů jednotlivých členů postupujeme tak, že napíšeme nejprve pohled možných pohyb ů a existujících okamžitých středů otá čení.

U čtyřčlenného mechanismu se vyskytují tyto pohyby a póly:

1,2	1,3	1,4
2,3	2,4	
	3,4	

Nejprve vyhledáme póly pohyb ů členů spojených přímo kinematickými dvojicemi a ur číme druh pohybu ů pak rozepíšeme symbolickými vztahy pohybu složen ě.

Složený pohyb 1,3 lze napsat takto:

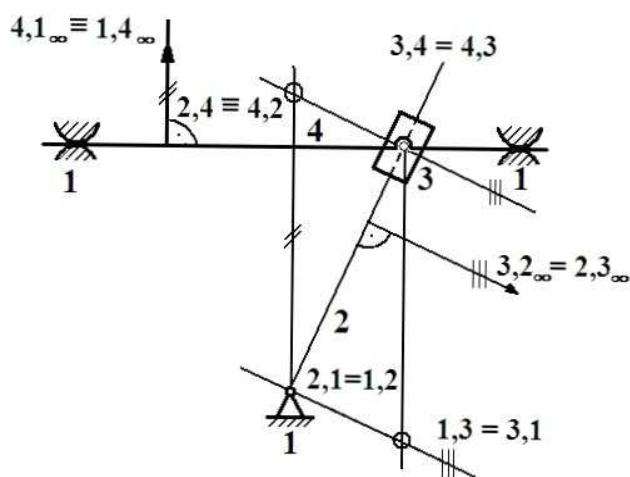
$$1,3 = 1,2 + 2,3 \quad \text{a} \quad 1,3 = 1,4 + 4,3$$

Pól 1,3 leží na přímce procházející póly 1,2 a 1,3 a sou časně na přímce procházející póly 1,4 a 4,3 (obr. 3.26). V průsečíku těchto přímek leží hledaný pól 1,3. Rozborem díl čích základních současných pohyb ů a jejich skládáním ur číme druh výsledného složeného pohybu 1,3.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr.3.26: Složený mechanismus

Složený pohyb 2,4 lze vyjádřit symbolickými vztahy:

$$2,4 = 2,3 + 3,4 \quad \text{a} \quad 2,4 = 2,1 + 1,4$$

Polohu pólů 2,4 určíme pomocí průsečíku dvou vyšetřovaných geometrických míst, tj. dvou přímkou, daných spojnicí pólů 2,3 a 3,4 a spojnicí pólů 2,1 a 1,4. Druh pohybu 2,4 určíme pomocí skládání dílčích základních pohybů.

Zavedením reciprokéhopohybu se poloha pólů nemění.

Přehled jednotlivých vzájemných pohybů těchto jejich druhů uvedeme do tabulky (obr.80)

Označení pohybu:	Druh pohybu:
1,2	pohyb rotační
1,3	pohyb složený 1,4+4,3=pohyb obecný pohyb složený 1,2+2,3=pohyb obecný
1,4	pohyb translační
2,3	pohyb translační
2,4	pohyb složený 2,3+3,4=pohyb obecný pohyb složený 2,1+1,4=pohyb obecný
3,4	pohyb rotační

Tab.3.1: Značení pohybů konaných kinematickými členy

Smysl kinematického řešení mechanismu spočívá ve vyšetření pohybu jednotlivých členů a jejich významných bodů v závislosti na daném nebo předepsaném pohybu členů hnacích. Jde o zjištění závislosti polohy, rychlosti a zrychlení hnacích členů a jejich bodů na pohybu hnacích členů nebo na čase.

Vyšetřování kinematických veličin jednotlivých členů mechanismu a důležitých bodů lze provést různými metodami.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky



Kinematické řešení může být analytické, grafické, graficko-početní a experimentální. Mezi analytické metody se řadí například geometrická metoda, vektorová metoda, metoda převodových funkcí, maticová metoda.

Vektorová metoda a maticová metoda jsou obecné metody využitelné zejména pro řešení úloh například počítač pomocí vhodných programů.

Pro základní seznámení s problematikou kinematických řešení uvedeme zde ze souboru analytických metod metodu převodových funkcí a ze souboru graficko-početního řešení použít teorii současných pohybů.

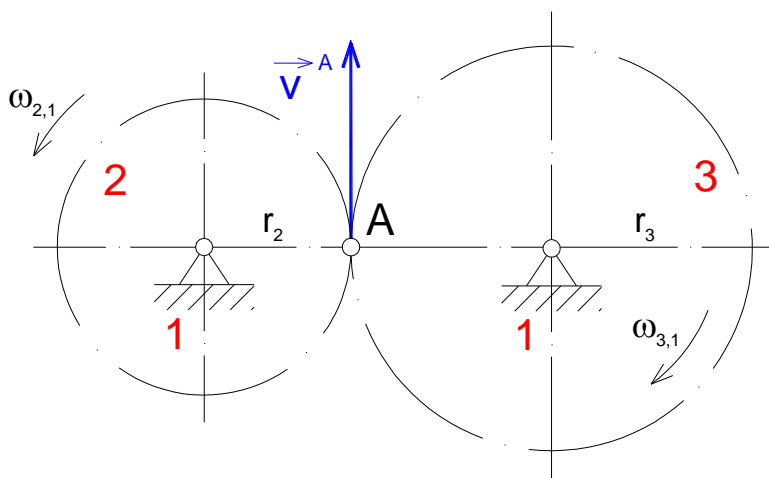
3.6 Kinematické mechanismy s konstantním převodem

Do skupin mechanismů s konstantním převodem patří mechanismy s ozubenými koly, mechanismy řemenové, lanové, řetězové a řecí převody.

Základní úlohou kinematiky je stanovení převodového poměru (převodu), dále pak rychlosti, zrychlení a polohy hnaných členů v vybraných bodech.

Jednoduchý převod ozubených kol

Následující obrázek je schematicky zakreslený jednoduchý převod ozubených kol, kde hnaným členem je kolo 2 a háněním členem kolo 3.



Obr. 3.27: Ozubený převod

V bodě A se dotýkají obě kružnice obou kol a je zde společná obvodová rychlost. Tuto rychlost vyjádříme úhlovými rychlostmi a poloměry obou kol:

$$v^A = \omega_{2,1} r_2 = \omega_{3,1} r_3 \quad (3.4)$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky



Převod mezi hnaným a hnacím kolem potom definujeme ob-
 ráčeně jako poměr úhlových rychlostí
 kola hnaného ke kolu hnacímu:

$$p = \frac{\omega_{2,1}}{\omega_{3,1}} = \frac{r_3}{r_2} \quad (3.5)$$

Z rovnice $\pi d = t z$ (t – rozteč kola, d – průměr kola, z – počet zubů) lze soudit, že průměr roztečné kružnice bude:

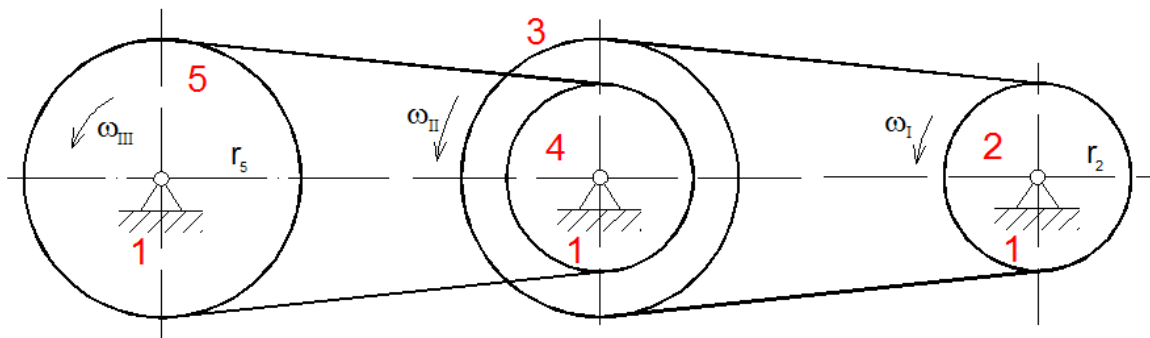
$$d = \frac{t}{\pi} z = m z \quad (3.6)$$

kde $\frac{t}{\pi} = m$ označuje modul zubení.

Převodový poměr mezi koly lze vyjádřit sdruženým vztahem:

$$p = \frac{r_3}{r_2} = \frac{d_3}{d_2} = \frac{m z_3}{m z_2} = \frac{z_3}{z_2} \quad (3.7)$$

U jednoduchého převodu ozubenými koly se smysl otáčení hnaného kola. Vložením kola 4 mezi hnané kolo 2 a hnané kolo 3 se převodový poměr nezmenší a dosáhne stejného smyslu otáčení, jak je znázorněno na následujícím obrázku:



Obvodové rychlosti bodů A a B jsou potom znázorněny vztahy 3.8 a 3.9:

$$v^A = \omega_{2,1} r_2 = \omega_{4,1} r_4 \quad (3.8)$$

$$v^B = \omega_{4,1} r_4 = \omega_{3,1} r_3 \quad (3.9)$$

Převodový poměr stejného jednoduchého převodu nezávisí na

$$p = \frac{\omega_{2,1}}{\omega_{3,1}} = \frac{r_3}{r_2} \quad (3.10)$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
 a státním rozpočtem České republiky

