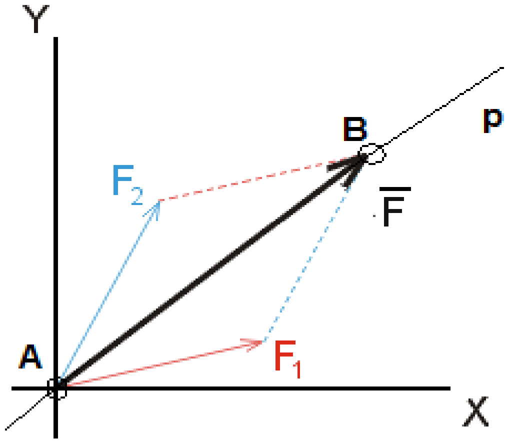
4. Statika – základní pojmy a základy rovnováhy sil

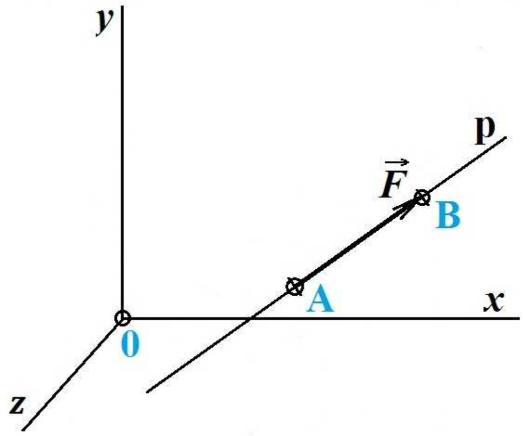
Síla je veličina vektorová. Je určena působištěm, směrem, smyslem a velikostí. Působiště síly je bod, ve kterém se přenáší účinek síly na těleso. Směr síly je dán přímkou *p*, tzv. nositelka síly, a smysl síly určuje její orientaci na této nositelce. Tento smysl síly je vyznačen šipkou. Velikost síly určuje intenzitu jejího působení.

Graficky lze sílu jako vektor popsat úsečkou *AB*, kdy bod *A* je v počátku souřadnicového systému *XY* o souřadnicích *(0,0)* a koncový bod síly je v místě bodu *B* (koncový bod). Počátek působiště síly *F* je v bodě *A*. Tento stav je zobrazen na následujícím obrázku.



Obr. 4.1: Označení síly F a její umístění v osách X a Y

Směr síly v prostoru lze také označit následujícím obrázkem (je si ovšem třeba představit, že taková síla může v prostoru působit z jakéhokoliv místa do jakéhokoliv směru – toto je hlavní rozdíl mezi obrázkem 4.1 a 4.2)



Obr. 4.2 Vektor síly

V mechanice – statice označujeme sílu jako vektor $\vec{F}$ a velikost síly F (symbol bez šipky)

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE   MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY   OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost   Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Sílu jako takovou určují některé prvky (polohové veličiny), které jsou orientovány jednak dle systému (rovina nebo prostor), ve kterém sílu popisujeme a smysl a velikost síly.

Síla v rovině

1. Souřadnice působiště síly x_a , y_a (m).
2. Směrový úhel α_F udávající sklon nositelky síly a její smysl. Úhel je potom měřen v kladném smyslu osy x k vektoru síly proti pohybu hodinových ručiček.
3. Velikost síly F (N).

Síla v prostoru

1. Souřadnice působiště síly x_a , y_a , z_a (m).
2. Směrový úhel α_F , β_F , γ_F zaměřené od kladného smyslu osy k vektoru síly.
3. Velikost síly F (N).

Obr. 4.3: Síla (a energie) při nárazu „neřízené“ lokomotivy je devastující

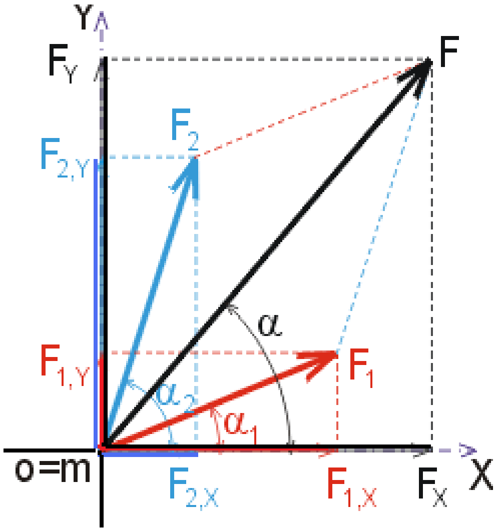
4.1 Stanovení síly F výpočtem

Stanovení síly F určujeme zpravidla výpočty, které budou uvedeny níže a vztahují k následujícímu obrázku. Základním předpokladem je vytvořit osové složky sil, tak jak jsou označeny v obrázku červenou, modrou a konečně černou barvou. Jinými slovy jsou to složky F_1 a F_2, které jsou rozloženy do jednotlivých složek F_{1x} , F_{2x} *(rovnoběžných s osou X),* F_{2y} , F_{1y} *(rovnoběžných s osou Y).*

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE · esf · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost · Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr. 4.4: Složky sil

Výpočet sil orientovaných v ose X:

$$F_{1,x} = F_1 \,.\cos\alpha_1 \tag{4.1}$$

$$F_{2,x} = F_2 \,.\cos\alpha_2 \tag{4.2}$$

Výpočet sil orientovaných v ose Y:

$$F_{1,y} = F_1 \,.\sin\alpha_1 \tag{4.3}$$

$$F_{2,y} = F_2 \,.\sin\alpha_2 \tag{4.4}$$

Výpočet vodorovné a svislé složky síly F dostaneme ze vztahů:

$$F_x = F_{1,x} + F_{2,x} \tag{4.5}$$

$$F_y = F_{1,y} + F_{2,y} \tag{4.6}$$

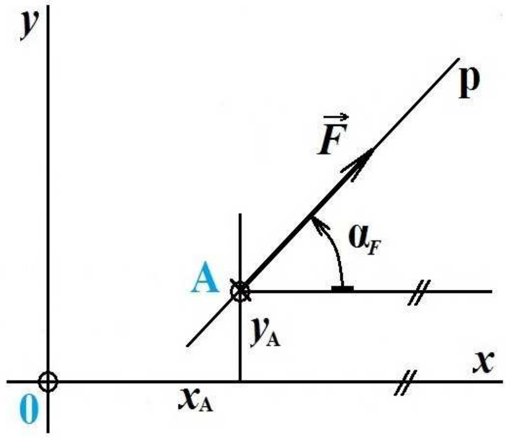
Velikost výsledné síly F pak dostaneme ze vztahu:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \tag{4.7}$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE   MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY   OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost   Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

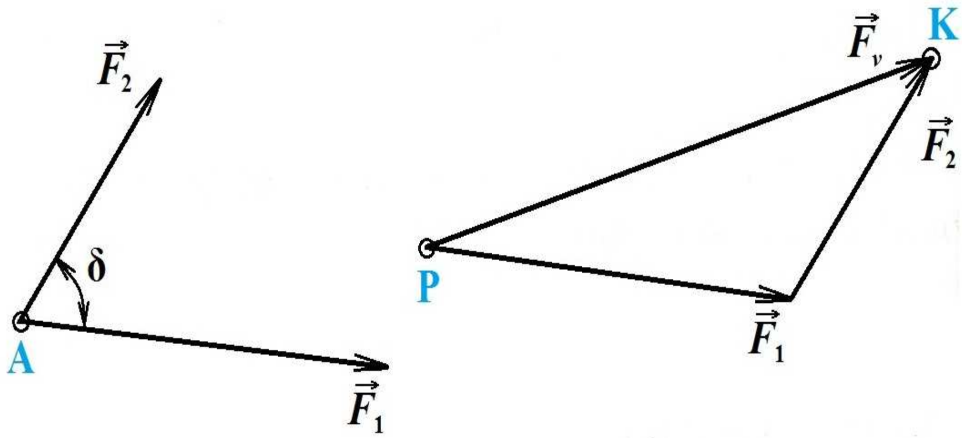


Obr. 4.5

4.2 Zákon rovnoběžníka sil

Pro skládání dvou **různoběžných** sil působících na tělese v jednom bodě platí zákon rovnoběžníka vektorů. Společný účinek dvou sil je stejný jako účinek síly, $\vec{F}_v$ jejíž nositelka, smysl a velikost je určena úhlopříčkou rovnoběžníka, jehož stranami jsou síly $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$. Výslednice je dána vektorovým součtem:

$$\overrightarrow{F_v} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{4.8}$$



Obr. 4.6 Určení výslednice pomocí zákona rovnoběžníka vektorů

4.3 Rovnováha dvou sil

Dvě síly působící v jednom bodě jsou v rovnováze tehdy, jsou-li na společné nositelce, mají-li stejnou velikost a opačný smysl. Vektorový součet takových sil je roven nulovému vektoru, tj. jejich výslednice je nulová a účinky obou sil se ruší.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

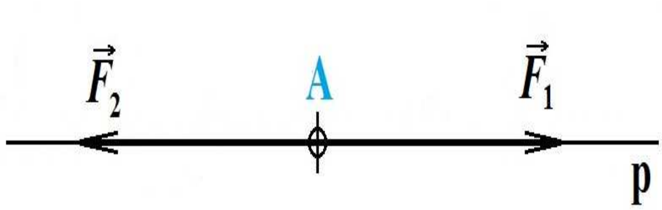
EVROPSKÁ UNIE · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost · Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pro síly platí vektorová rovnice

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \tag{4.9}$$

Takže $$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \, . \tag{4.10}$$

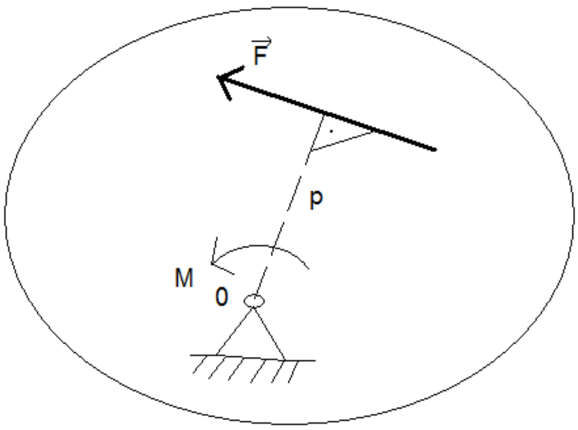


Obr. 4.7 Výslednice navzájem opačných sil

Nulovým vektorem je soustava dvou sil stejné velikosti opačných smyslů na společné nositelce. Přidáním nebo odebráním nulového vektoru se nezmění pohybový účinek silové soustavy na těleso.

4.4 Moment síly k nositelce

Otáčivý účinek síly na tělese vyjadřujeme momentem síly. Podle obr. 4.8, je otáčivý účinek síly $\vec{F}$ na tělese kolem bodu 0 tím větší, čím je větší síla a čím je větší kolmá vzdálenost síly od bodu 0, kde je těleso otáčivě uloženo. Bod 0 nazýváme momentovým bodem.



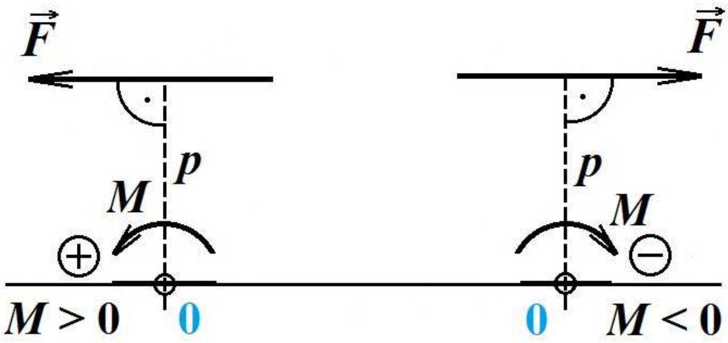
Obr. 4.8 Momentový bod

Moment síly $\vec{F}$ k bodu 0 je určen součinem síly F a ramene p:

$$M = F \,.\, p \quad \text{(N.m)} \tag{4.11}$$

Prochází-li nositelka síly momentovým bodem 0 (je-li momentový bod na nositelce síly), je rameno $p = 0$ a moment síly je roven nule.

Smysl otáčení tělesa určuje znaménko momentu (4.9).



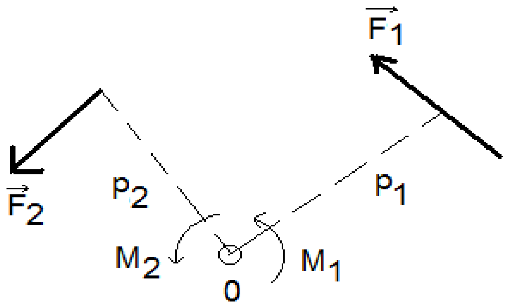
Obr. 4.9 Smysl otáčení momentů

Otáčí-li síla $\vec{F}$ tělesem proti smyslu pohybu hodinových ručiček, je moment kladný, opačný smysl otáčení je záporný.

Redukcí momentu je nahrazení otáčivého účinku jedné síly stejným otáčivým účinkem jiné síly. Podmínkou je rovnost momentů obou sil (obr. 4.10):

$$M_2 = M_1 \tag{4.12}$$

$$F_2 p_2 = F_1 p_1 \tag{4.13}$$



Obr. 4.10 Rovnost momentů

Působí-li na těleso v rovině několik sil, např. $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ o momentech $M_1 = F_1 p_1$, $M_2 = F_2 p_2$, $M_3 = -F_3 p_3$, je výsledný otáčivý účinek roven součtu jednotlivých otáčivých účinků a výsledný moment je

$$M = M_1 + M_2 + M_3 = F_1 p_1 + F_2 p_2 - F_3 p_3 \tag{4.14}$$

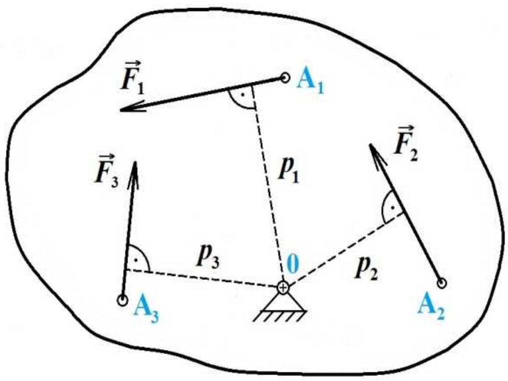
Výsledný moment je roven algebraickému součtu momentů jednotlivých sil, tj. obecně:

$$M = \sum_1^n M_i \ . \tag{4.15}$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



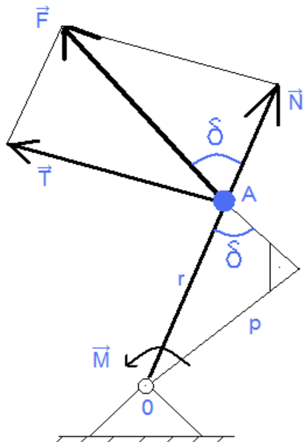
Obr. 4.11 Více momentů v působišti

Podle obr. 4.12 působí síla $\vec{F}$ v bodě A a má směr daný úhlem δ vzhledem ke spojnici $\overline{0A} = r$. Síla $\vec{F}$ má složky $\vec{N}$ a $\vec{T}$. Moment k bodu 0 je dán součinem velikosti síly F a kolmého ramene p. Momentové rameno má velikost $p = r \sin \delta$.
Moment síly F je tedy

$$M = Fp = Fr \sin \delta = Tr \ , \tag{4.16}$$

kde $T = F \sin \delta$.

Moment síly $\vec{F}$ k bodu 0 je tedy dán momentem složky síly do směru kolmého na spojnici $\overline{0A}$.



Obr. 4.12 Moment síly k bodu 0

4.5 Vektor momentu silové dvojice

Silovou dvojici tvoří dvě síly rovnoběžné, stejně velké a vzájemně opačného smyslu, když jejich nositelky nejsou totožné přímky. Silová dvojice má na tělese otáčivý účinek.

Celkový moment obou sil k libovolně položenému bodu 0 roviny silové dvojice je roven součtu momentů obou sil:

$$M = M_1 + M_2 \tag{4.17}$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

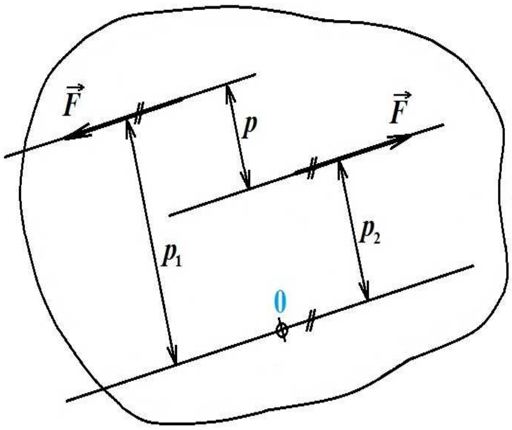
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podle obr. 4.13 jsou momenty $M_1 = Fp_1,\ M_2 = -Fp_2$ (4.18)

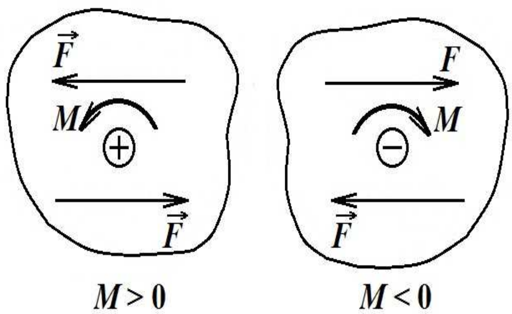
Součet těchto momentů je $M = Fp_1 - Fp_2 = F(p_1 - p_2)$ (4.19)

$M = Fp$ (N.m) (4.20)



Obr. 4.13 Moment silové dvojice

Moment silové dvojice nezávisí na poloze momentového bodu a má velikost rovnou součinu velikosti síly a ramene silové dvojice, tj. kolmé vzdálenosti obou sil mezi sebou.
Smysl otáčení silové dvojice s tělesem určuje znaménko momentu. Otáčí-li silová dvojice tělesem proti pohybu hodinových ručiček, je moment kladný.



Obr. 4.14 Smysl otáčení silové dvojice

Vektor momentu silové dvojice k bodu 0 je dán vektorovým součtem

$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ (4.21)

$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}$ (4.22)

$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times (-\vec{F})$ (4.23)

$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F})$ (4.24)

$\vec{M} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}$ (4.25)

Protože $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{r}$ (4.26)

a $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}$ (4.27)

je vektor momentu silové dvojice $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (4.28)

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

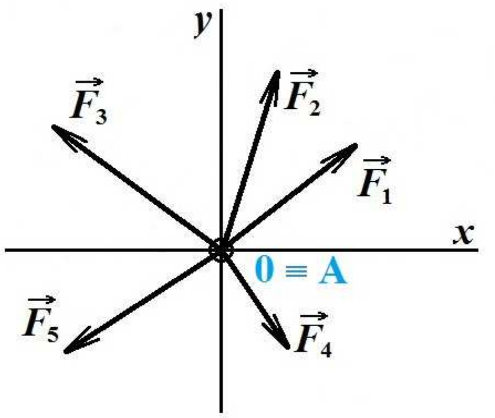
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4.6 Rozdělení silových soustav

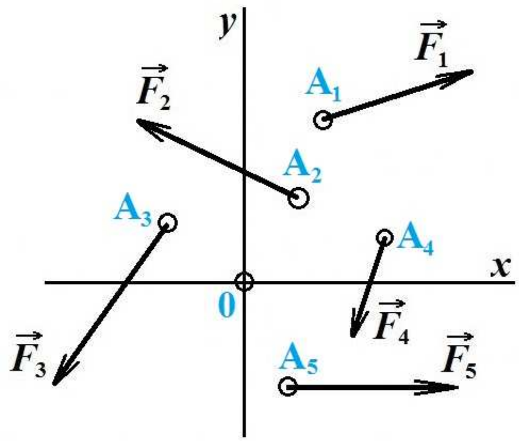
Silové soustavy rozdělujeme na rovinné a prostorové. Každá z těchto silových soustav může být o společném působišti (kdy se nositelky sil protínají v jednom bodě) a o různých působištích (kdy jsou nositelky sil obecně rozptýlené a neprotínají se v jednom bodě).

V 4.15 je rovinná silová soustava o společném působišti, působící do různých směrů s různou velikostí sil v soustavě.



Obr. 4.15 Rovinná silová soustava – společné působiště

V 4.16 je rovinná silová soustava o různých působištích a působící do různých směrů s různou silovou velikostí.



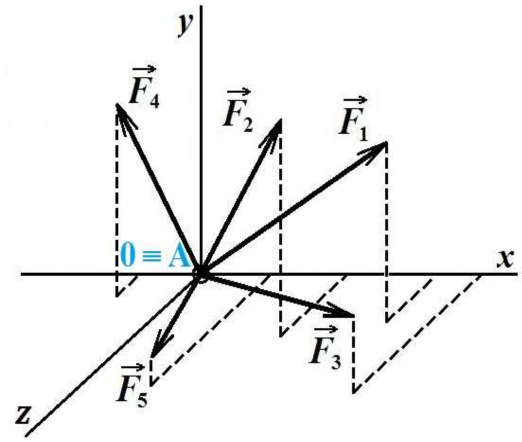
Obr. 4.16 Rovinná silová soustava – různé působiště

V 4.17 je prostorová silová soustava o společném působišti. Tak jak bylo rozvedeno v obrázku 4.15 i nyní se jedná o společné působiště, ale působení sil není rovinné ale prostorové. Je si třeba toto uvědomit, protože při řešení těchto silových soustav nám přibývá do řešení 3 proměnná v ose „z“ a dalším směrovým úhlem.
Síly jsou opět s různým směrem a různou velikostí.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

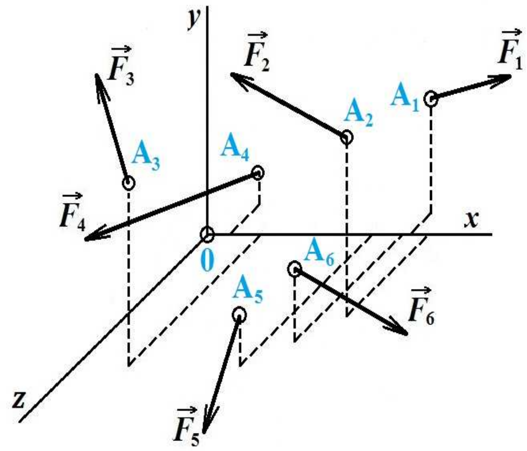
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr. 4.17 Silová prostorová soustava – společné působiště

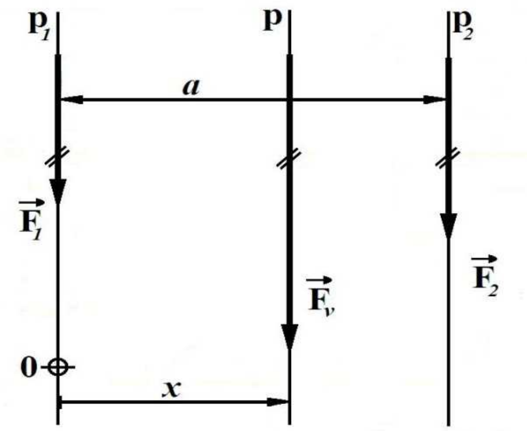
V obrázku 4.18 je prostorová silová soustava o různých působištích, v praxi jeden z nejběžnějších případů co se týče složených mechanismů.



Obr. 4.18 Prostorová silová soustava – různé působiště

4.7 Výsledné nahrazení dvou rovnoběžných sil v rovině

Jsou dány dvě rovnoběžné síly $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ v rovině na nositelkách p_1 a p_2 ve vzdálenosti a od sebe. Cílem je určit velikost, smysl a polohu výslednice početně a graficky.



Obr. 4.19 Rovnoběžné síly v rovině

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4.7.1 Výslednice dvou sil – početní řešení

Výslednice soustavy rovnoběžných sil leží na rovnoběžné nositelce p s přímkami p_1 a p_2 . Ve výpočtovém obrázku (obr. 4.19) zakreslíme sílu $\vec{F}_v$ v předpokládaném smyslu na nositelce v neznámé vzdálenosti x od bodu 0 (který volíme libovolně, např. na přímce p_1).

Podle obr. 4.19 je $$F_v = F_1 + F_2 \quad (4.30)$$

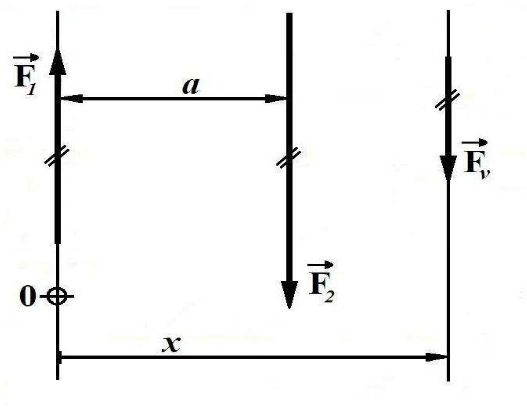
(kladný smysl pro sčítání sil určuje předpokládaný smysl síly $\vec{F}_v$).

Podle momentové věty je $$-F_v x = 0 - F_2 a \quad (4.31)$$

a souřadnice $$x = \frac{F_2 a}{F_v}. \quad (4.32)$$

Vychází-li výsledek kladný, je skutečný smysl výslednice shodný s předpokládaným smyslem ve výpočtovém obrázku. Je-li výsledek záporný, je skutečný smysl výslednice opačný. To platí i pro souřadnici x .

V případě, kdy síly mají vzájemně opačné smysly, leží výslednice na vnější straně větší síly a v jejím smyslu (obr. 4.20).



Obr. 4.20 Řešení výslednice dvou sil

Podle obrázku je velikost výslednice $$F_v = F_2 - F_1 \quad (4.33)$$

a z momentové věty vypočítáme souřadnici x :

$$-F_v x = 0 - F_2 a \quad (4.34)$$

$$x = \frac{F_2 a}{F_v} \quad (4.35)$$

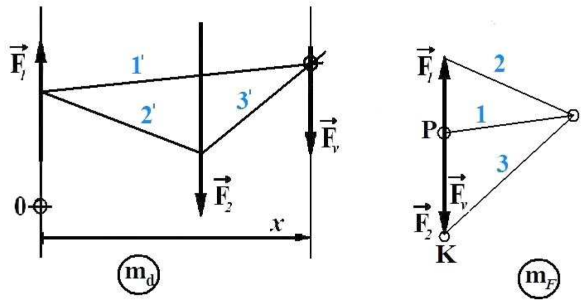
4.7.2 Grafické řešení

Úlohu podle 4.20 řešíme v měřítku délek m_d a měřítku sil m_F pomocí pólového obrazce a výslednicové čáry (4.21)

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr. 4.21 Grafické řešení silové dvojice

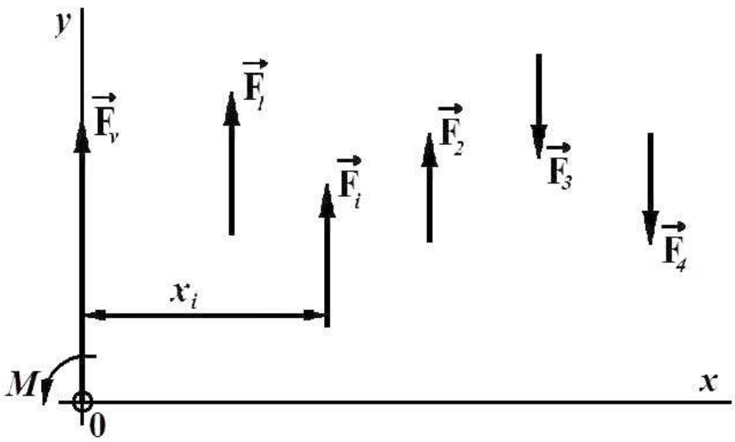
- Odměříme výkresovou hodnotu souřadnice x (cm) a vypočítáme skutečnou hodnotu $(x) = xm_d$ (m).
- V silovém obrazci odměříme také výkresovou hodnotu velikosti výslednice F_v (cm) a vypočítáme skutečnou hodnotu velikosti výslednice $(F_v) = F_v m_F$ (N).
- Orientace výslednice je dána body P a K.

4.9 Nahrazení soustavy „n“ rovnoběžných sil v rovině

4.9.1 Početní řešení

Soustavu lze nahradit obecně silovou výslednicí $\vec{F_v}$ ve zvoleném počátku a momentem $\vec{M}$ výsledné silové dvojice (4.22). Souřadnicový systém 0, x, y volíme tak, aby jedna osa, např. y byla rovnoběžná se silami $\vec{F_i}$ (kde $i = 1, 2, 3, \dots, n$). Přeložením sil do počátku 0 dostaneme soustavu sil na přímce y, jejíž výslednice je

$$F_v = \sum_1^n F_i \qquad (4.36)$$



Obr. 4.22 Silová soustava n-sil v rovině

Při přeložení každé síly $\vec{F_i}$ do počátku vzniká silová dvojice o momentu $M_i = F_i x_i$. Tyto momenty se algebraicky sčítají ve výsledný moment

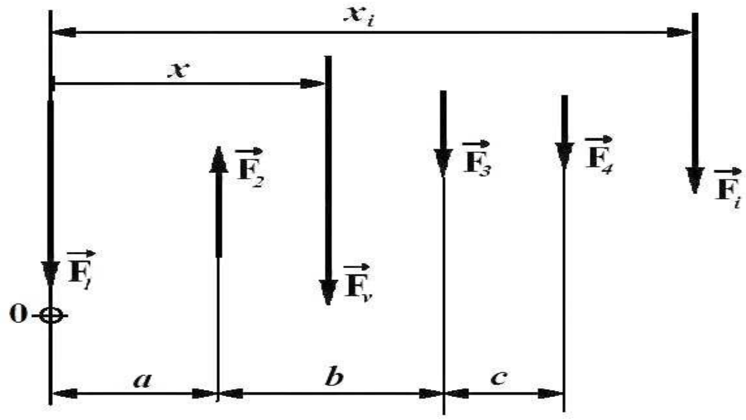
$$M = \sum_1^n M_i = \sum_1^n F_i x_i \qquad (4.37)$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Výslednice je rovnoběžná se silami soustavy. Ve výpočtovém obrázku (4.23) zakreslíme $\vec{F}_v$ v předpokládaném smyslu na její nositelce. Velikost výslednice je dána algebraickým součtem všech sil. Do součtu s kladným znaménkem zapíšeme ty síly, které mají stejný smysl jako předpokládaná výslednice.



Obr. 4.23 Výslednice pro rovnoběžné n-síly

Podle obrázku je velikost výslednice: $F_v = F_1 - F_2 + F_3 + F_4$ (4.38)

čili obecně

$$F_v = \sum_1^n F_i \qquad (4.39)$$

Je-li výsledek kladný, je smysl výslednice shodný s předpokládaným smyslem ve výpočtovém obrázku.

Polohu nositelky p určíme pomocí momentové věty, k bodu 0 je:

$$-F_v x = 0 + F_2 a - F_3(a+b) - F_4(a+b+c) \qquad (4.40)$$

obecně

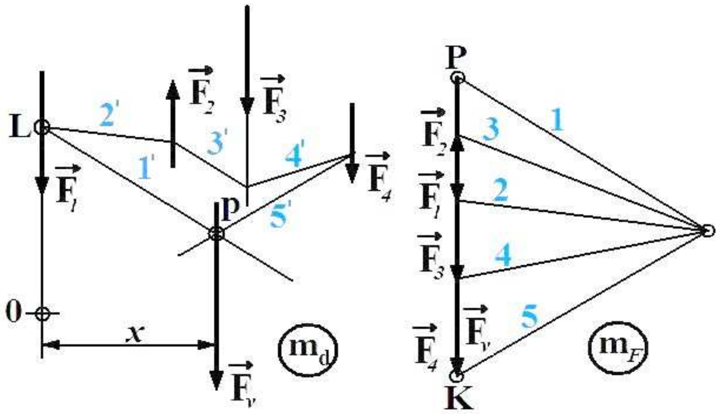
$$F_v x = \sum_1^n F_i\, x_i \qquad (4.41)$$

Z této rovnice pak vyjádříme souřadnici x.

4.9.2 Grafické řešení

Silovou soustavu nakreslíme v měřítku délek m_d a složkový obrazec v měřítku sil m_F.

Výslednice je určena v silovém obrazci počátečním bodem P a koncovým bodem K. Odtud zjistíme výkresovou hodnotu její velikosti, její směr a smysl.



Obr. 4.24 Grafické řešení – složkový obrazec

Pólovým obrazcem a výslednicovou čarou vyřešíme polohu nositelky p výslednice. První paprsek výslednicové čáry vedeme libovolným bodem L na nositelce síly $\vec{F}_1$. Průsečík prvního a posledního paprsku výslednicové čáry leží na hledané nositelce p.

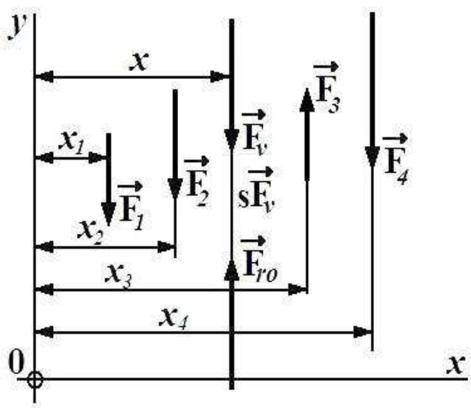
Po odměření výkresových hodnot výsledků vypočítáme jejich skutečné hodnoty:

$$(F_v) = F_v m_F \tag{4.42}$$

$$(x) = x m_d \tag{4.43}$$

4.10 Rovnováha soustavy rovnoběžných sil v rovině

Působí-li na tělese vzájemně rovnoběžné síly s jejich výslednicí $\vec{F}_v$, uvedeme tuto soustavu do rovnováhy přidáním síly $\vec{F}_{ro}$, která je na nositelce s$\vec{F}_v$, je stejně velká jako $\vec{F}_v$ a má opačný smysl (4.25). Pro rovnováhu výslednice $\vec{F}_v$ a síly $\vec{F}_{ro}$ platí vektorová podmínka: $\vec{F}_v + \vec{F}_{ro} = \vec{0}$



Obr. 4.25 Soustava rovnoběžných sil v rovině

4.10.1 Početní řešení

Při početním řešení použijeme podmínky rovnováhy, kdy podle obr. 4.25 je

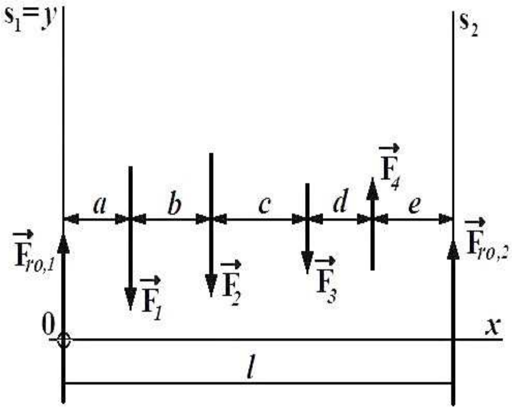
$$\sum_1^n F_{ix} = 0 \dots\dots 0 = 0 \quad \dots\dots \tag{4.44}$$

podmínka identicky splněna.

$$\sum_1^n F_{iy} = 0 \dots\dots\ F_{ro} - F_1 - F_2 + F_3 - F_4 = 0 \tag{4.45}$$

$$\sum_1^n M_i = 0 \dots\dots\ F_{ro}x - F_1x_1 - F_2x_2 + F_3x_3 - F_4x_4 = 0 \tag{4.46}$$

V těchto rovnicích jsou dva neznámé parametry: F_{ro} a x .
Je-li úkolem určit dvě rovnovážné síly na daných rovnoběžných nositelkách s_1 a s_2, použijeme při početním řešení opět podmínky rovnováhy.



Obr. 4.26 Smysl rovnovážných sil

Smysl rovnovážných sil $\vec{F}_{ro,1}$, $\vec{F}_{ro,2}$ na nositelkách s_1 a s_2 předpokládáme a z obrázku plyne:

$$\sum_1^n F_{ix} = 0 \dots\dots 0 = 0 \quad \dots\dots \tag{4.47}$$

podmínka je identicky splněna

$$\sum_1^n F_{iy} = 0 \dots\dots\ F_{ro,1} - F_1 - F_2 - F_3 + F_4 + F_{ro,2} = 0 \tag{4.48}$$

$$\sum_1^n M_i = 0 \dots\dots\ F_{ro,2}l + F_4(a+b+c+d) - F_3(a+b+c) - F_2(a+b) - F_1a = 0 \tag{4.49}$$

Z rovnic vyřešíme neznámé $F_{ro,1}$ a $F_{ro,2}$.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ