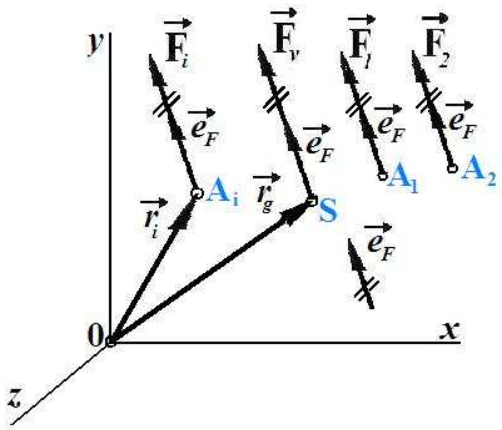
5. Statika – poloha střediska sil

5.1 Rovnoběžné sily a jejich střed

Uvažujeme soustavu vzájemně rovnoběžných sil v prostoru s pevnými působišti. Každá síla $\vec{F}_i$ má působiště A_i dané polohovým vektorem $\vec{r}_i$. Všechny síly mají jednotkový vektor $\vec{e}_F$ (obr. 5.1).



Obr. 5.1

Sílu $\vec{F}_i$ lze vyjádřit pomocí jednotkového vektoru a velikosti:

$$\vec{F}_i = \vec{e}_F F_i \tag{5.1}$$

Silová výslednice

$$\vec{F}_v = \sum_1^n \vec{F}_i = \sum_1^n \vec{e}_F\, F_i = \vec{e}_F \sum_1^n F_i \tag{5.2}$$

má působiště v bodě S s polohovým vektorem $\vec{r}_S$.

Podle momentové věty (moment výslednice soustavy sil k bodu 0 je roven součtu momentů jednotlivých sil k témuž bodu) je

$$\vec{r}_S \times \vec{F}_v = \sum_1^n \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) \tag{5.3}$$

Po úpravě lze psát

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_1^n \vec{r}_i F_i}{\sum_1^n F_i} \tag{5.4}$$

Vektor $\vec{r}_S$ nezávisí na jednotkovém vektoru $\vec{e}_F$, tj. na orientaci (směru a smyslu) sil $\vec{F}_i$. Pootočením soustavy sil o libovolný úhel se poloha bodu S nezmění.

Středisko S soustavy rovnoběžných sil s pevnými působišti je bod, kterým prochází nositelka silové výslednice při libovolném směru sil vzhledem k souřadnicovému systému 0, x , y , z .

<u>Bod S se také nazývá statický střed.</u>

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Rozepsáním vztahu 5.4 dostaneme souřadnice střediska sil:

$$x_S = \frac{\sum_1^n x_i F_i}{\sum_1^n F_i} \tag{5.5}$$

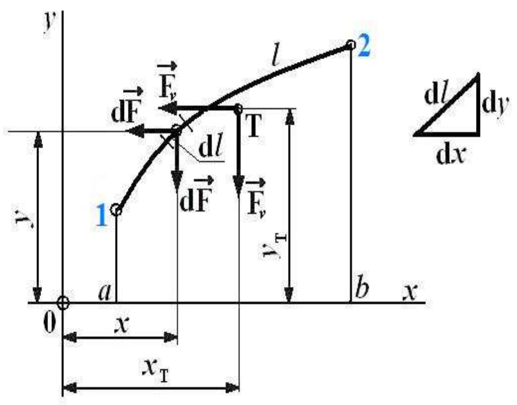
$$y_S = \frac{\sum_1^n y_i F_i}{\sum_1^n F_i} \tag{5.6}$$

$$z_S = \frac{\sum_1^n z_i F_i}{\sum_1^n F_i} \tag{5.7}$$

5.2 Těžiště rovinné čáry

Rovinná čára je dále dělena na dva základní druhy, a to rovinnou čáru a rovinou čáru lomenou. Pro obě platí jednotné výpočtové postupy. Pokud by se jednalo o prostorovou lomenou čáru nebo křivku je opět nutné uvažovat třetí rozměr ve směru osy „z“.

Je-li čára dána rovnicí $y = f(x)$, rozdělíme její celou délku l na elementární části $\mathrm{d}l$ a v jejich těžištích zavedeme ve směru x elementární síly $\mathrm{d}\vec{F}$ úměrné jejich délkám $\mathrm{d}l$ (obr. 5.2).



Obr. 5.2 Těžiště rovinné čáry

Je-li $\mathrm{d}F = k\mathrm{d}l$ a $k = 1$, je $\mathrm{d}F = \mathrm{d}l$.

Výslednice rovnoběžných elementárních sil je

$$F_v = \int_{(l)} \mathrm{d}F = \int_{(l)} \mathrm{d}l \tag{5.8}$$

Podle momentové věty je

$$F_v y_T = \int_{(l)} \mathrm{d}F y \tag{5.9}$$

a

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$y_T \int_{(l)} \mathrm{d}l = \int_{(l)} \mathrm{d}l y \tag{5.10}$$

Souřadnice

$$y_T = \frac{\int_{(l)} y \mathrm{d}l}{\int_{(l)} \mathrm{d}l} \tag{5.11}$$

Z elementárního trojúhelníka (obr. 5.2) plyne elementární délka:

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 \left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]} = \mathrm{d}x\sqrt{1 + (y')^2} \tag{5.12}$$

Po dosazení do rovnice 5.11 je:

$$y_T = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x} \tag{5.13}$$

Pro výpočet souřadnice otočíme síly o 90° do směru rovnoběžného s osou y a použijeme opět momentovou větu.

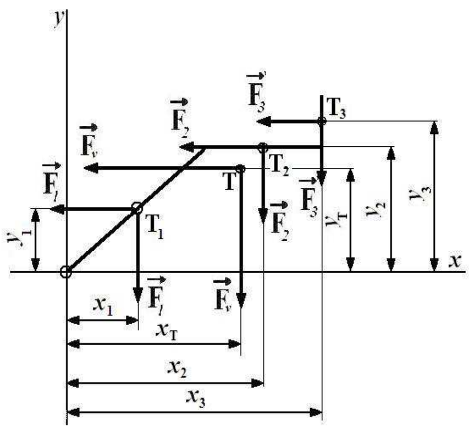
$$-F_v x_T = -\int_{(l)} \mathrm{d}F_x \tag{5.14}$$

$$x_T \int_{(l)} \mathrm{d}l = \int_{(l)} \mathrm{d}l x \tag{5.15}$$

$$x_T = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x} \tag{5.16}$$

Řešíme-li souřadnice rovinné *složené čáry*, např. podle obr. 5.3, postupujeme tak, že čáru rozdělíme na jednotlivé části, u nichž známe souřadnice těžišť, např. úsečky, kruhové oblouky apod. a v těžištích částí zavedeme síly vzájemně rovnoběžné o velikostech úměrných délkám.

Jednotlivé síly jsou $F_i = kl_i$ a výslednice je $F_v = \sum_1^n F_i$.
Početní řešení je založeno na použití momentové věty. K vysvětlení použijeme příklad podle obr. 5.3.



Obr. 5.3 Těžiště složené čáry

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pro soustavu sil zavedených rovnoběžně s osou y se uplatní následující vztahy k výpočtu souřadnice x_T :

$$F_v = \sum_1^n F_i = F_1 + F_2 + F_3 = k(l_1 + l_2 + l_3) \qquad (5.17)$$

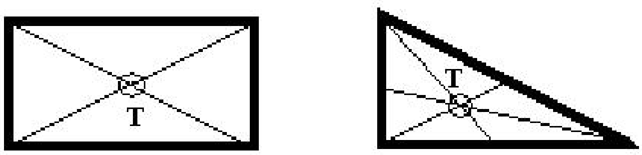
$$-F_v x_T = -F_1 x_1 - F_2 x_2 - F_3 x_3 \qquad (5.18)$$

$$-k(l_1 + l_2 + l_3) x_T = -k l_1 x_1 - k l_2 x_2 - k l_3 x_3 \qquad (5.19)$$

$$x_T = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3}{l_1 + l_2 + l_3} \qquad (5.20)$$

5.3 Těžiště rovinné plochy

Těžiště plochy obdélníka je v průsečíku jeho úhlopříček. Těžiště plochy trojúhelníka je v průsečíku jeho těžnic obr. 5.4.



Obr. 5.4 Těžiště (obdélník a trojúhelník)

Je-li plocha omezena křivkou, danou rovnicí $y = f(x)$, osou x a rovnoběžkami s osou y v bodech a , b , postupujeme při početním řešení následujícím způsobem.
Nejprve z celkové plochy vytkneme elementární část plochy ve tvaru obdélníka o rozměrech y a $\mathrm{d}x$.

V těžišti elementární plochy zavedeme sílu $\mathrm{d}F = k\mathrm{d}S = ky\mathrm{d}x$.
Výslednice rovnoběžných elementárních sil je

$$F_v = \int_{(S)} \mathrm{d}F = \int_a^b ky\mathrm{d}x \qquad (5.21)$$

Souřadnici y_T určíme momentovou větou pro síly rovnoběžné s osou x :

$$y_T \int_{(S)} \mathrm{d}F = \int_{(S)} \mathrm{d}F \frac{y}{2} \qquad (5.22)$$

$$y_T \int_{(S)} ky\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{(S)} ky^2\mathrm{d}x \qquad (5.23)$$

$$y_T = \frac{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}{2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x} \qquad (5.24)$$

Souřadnici x_T určíme momentovou větou pro síly rovnoběžné s osou y :

$$x_T \int_{(S)} \mathrm{d}F = \int_{(S)} \mathrm{d}F x \qquad (5.25)$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

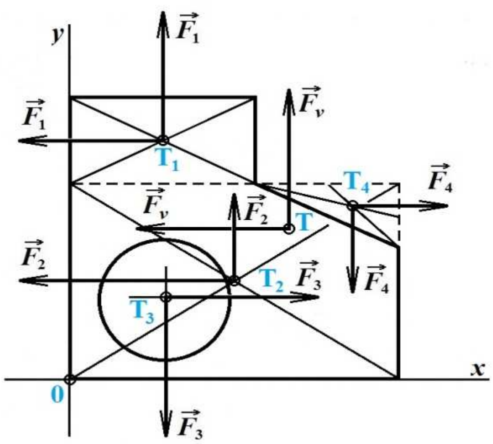
$$x_T \int_{(S)} ky\mathrm{d}x = \int_{(S)} ky\mathrm{d}x \; x \tag{5.26}$$

$$x_T = \frac{\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x} \tag{5.27}$$

5.3.1 Těžiště složené rovinné plochy

Podobně jako u řešení souřadnic těžiště složené čáry rozdělíme plochu na dílčí části, u kterých známe, nebo lze jednoduše stanovit souřadnice jejich těžišť.

V těžištích těchto jednotlivých částí zavedeme rovnoběžné síly úměrné velikostem ploch $F_i = kS_i$. Je-li některá část plochy odebrána – odečtena, zavedeme sílu v těžišti této části v opačném smyslu než u ostatních plocha.



Obr. 5.5 Těžiště rovinné plochy

Veličiny potřebné pro výpočet souřadnic T je vhodné sestavit do následující tabulky, která poskytuje vyhodnocení jednotlivých parametrů pro výpočet těžiště. Tuto tabulku lze použít jak pro rovinnou plochu, tak pro lomenou čáru.

i	x_i *(m)*	y_i *(m)*	S_i *(m)*	$S_i \, . \, x_i$ *(m)*	$S_i \, . \, x_i$ *(m)*
1					
2					
3					
…					

Obr. 5.6 Tabulka pro vyhodnocení těžiště

Podle rozdělení celé plochy na dílčí části napíšeme rovnici pro výslednici:

$$F_v = F_1 + F_2 - F_3 - F_4 = kS_1 + kS_2 - kS_3 - kS_4 \tag{5.28}$$

$$F_v = k(S_1 + S_2 - S_3 - S_4) \tag{5.29}$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$F_v = k\sum_1^n S_i = kS \tag{5.30}$$

Souřadnice x_T a y_T určíme momentovou větou:

$$x_T F_v = \sum_1^n x_i F_i \tag{5.31}$$

$$y_T F_v = \sum_1^n y_i F_i \tag{5.32}$$

Podle výpočtového obrázku 5.6 rozepíšeme vztahy do konkrétní podoby s ohledem na znaménka momentů:

$$x_T F_v = F_1 x_1 + F_2 x_2 - F_3 x_3 - F_4 x_4 \tag{5.33}$$

$$x_T = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 - S_3 x_3 - S_4 x_4}{S} \tag{5.34}$$

$$y_T F_v = F_1 y_1 + F_2 y_2 - F_3 y_3 - F_4 y_4 \tag{5.35}$$

$$y_T = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 - S_3 y_3 - S_4 y_4}{S} \tag{5.36}$$

Graficky stanovíme souřadnice těžiště složené plochy pomocí silového obrazce a výslednicové čáry podobně jako u složené čáry. Plochu narýsujeme v měřítku délek $m_d = \frac{(l)}{l}\left(\frac{m}{cm}\right)$ a silový obrazec v měřítku sil úměrných plochám $m_F = \frac{(F)}{F}\left(\frac{m^2}{cm}\right)$.

Průsečík nositelek výslednic ve směrech os x a y určuje polohu těžiště složené plochy.

Souřadnice těžiště obecně nepravidelných ploch lze stanovit početně nebo graficky tak, že celou plochu rozdělíme na co nejmenší části ve tvarech obdélníků nebo trojúhelníků a v těžištích zavedeme příslušné rovnoběžné síly úměrné velikosti ploch.

Po vyřešení polohy nositelek výslednic ve dvou na sebe kolmých směrech x a y stanovíme souřadnice jejich průsečíku, který určuje polohu těžiště.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE · esf · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost · Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ