6. Statika – rovnováha vázaného tělesa

6.1 Rovnováha vázaného tělesa

Těleso je vystaveno působení vnějších sil akčních, kterými mohou být osamělé síly, spojité zatížení a momenty silových dvojic. Akční síly se nazývají také síly prvotní – primární.

V místech, kde se stýká těleso s okolními tělesy, působí síly reakční. Tyto síly jsou silami ve vazbách a nazývají se druhotné – sekundární síly a jsou vyvolávány silami akčními. K řešení sil ve vazbách používáme metodu uvolňování.

Pod pojmem uvolnění tělesa rozumíme jeho myšlené vynětí ze soustavy okolních těles, jeho osamostatnění a nahrazení účinku okolních těles vazbovými silami – reakcemi v místech uložení.

Těleso je pod současným účinkem sil akčních a reakčních v rovnováze a platí pro něj podle typu silové soustavy příslušné podmínky rovnováhy sil. Po uvolnění tělesa a zavedení reakcí obdržíme v dané úloze určitý počet neznámých parametrů.

Je-li počet neznámých stejný jako počet rovnic plynoucích z podmínek rovnováhy, jde o úlohu staticky určitou.

Úloha je staticky neurčitá v případě většího počtu neznámých, než je počet rovnic statické rovnováhy.

V takovém případě, kdy je počet neznámých menší než počet podmínek rovnováhy, jde o úlohu staticky předurčitou. Síly akční a reakční jsou na tělese síly vnější.

Úlohy staticky neurčité, kdy je počet neznámých větší, než počet rovnic statické rovnováhy, řešíme v mechanice poddajných těles, kde chybějící rovnice s neznámými parametry doplníme z deformačních podmínek.

Bude-li např. těleso 2 zatíženo primárními silami a uloženo na rámu 1 podle obr. 6.1 vzniknou reakce na místech A a B. V těchto místech myšleno odstraníme těleso 1 a jeho účinek nahradíme reakcemi $\vec{F}_{x1,2}^{A}$, $\vec{F}_{y1,2}^{A}$, $\vec{F}_{1,2}^{B}$. Reakce tvoří 3 neznámé parametry.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

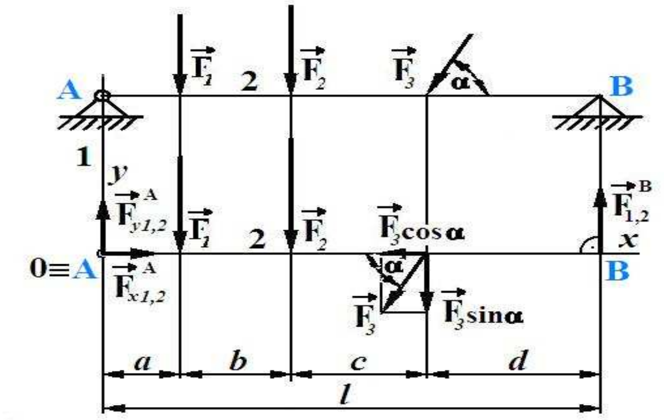
EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr. 6.1 Staticky určitá úloha s jednotlivými silami

Akční zatěžující síly a síly reakční (vazbové síly) tvoří silovou soustavu o různých působištích v rovině a musí splňovat 3 početní podmínky rovnováhy. Úloha podle obr. 6.1 je staticky určitá, neboť obsahuje 3 neznámé parametry a jsou pro jejich vyřešení k dispozici 3 lineárně nezávislé rovnice, které plynou rozepsáním početních podmínek rovnováhy.

Souřadnicový systém 0, x , y volíme libovolně, ale vhodně tak, aby byl počátek 0 v průsečíku nositelek dvou neznámých složek reakcí, tj. 0 ≡ A . V takovém případě obsahuje rovnice rovnováhy momentů pouze jednu neznámou a tím se řešení zjednoduší.
Podmínky rovnováhy a vyplývající rovnice statické rovnováhy jsou:

$$\sum_1^n F_{ix} = 0 \ldots\ldots F^A_{x1,2} - F_3 \cos\alpha = 0 \qquad (6.1)$$

$$\sum_1^n F_{iy} = 0 \ldots\ldots F^A_{y1,2} - F_1 - F_2 - F_3 \sin\alpha + F^B_{1,2} = 0 \qquad (6.2)$$

$$\sum_1^n M_{iA} = 0 \ldots\ldots F^B_{1,2} l - F_3 \sin\alpha\,(a+b+c) - F_2(a+b) - F_1 a = 0 \qquad (6.3)$$

Řešením soustavy rovnic plynou neznámé parametry.

6.2 Typy vnějšího primárního zatížení

Osamělá síla je zatížení na povrchu tělesa soustředěného do bodu. Ve skutečnosti působí povrchové síly na určité ploše nebo délce. Je-li plocha velmi malá, lze toto zatížení považovat za bodové.

Osamělý moment je zatížení silovou dvojicí v jednom místě.

Spojité zatížení je zatížení rozložené na určité délce (ploše) povrchu tělesa. Průběh tohoto zatížení je dán funkcí $q = q(x)$. Spojité zatížení $q(x)$ je tzv. měrné zatížení jednotky délky vyjádřeno vztahem

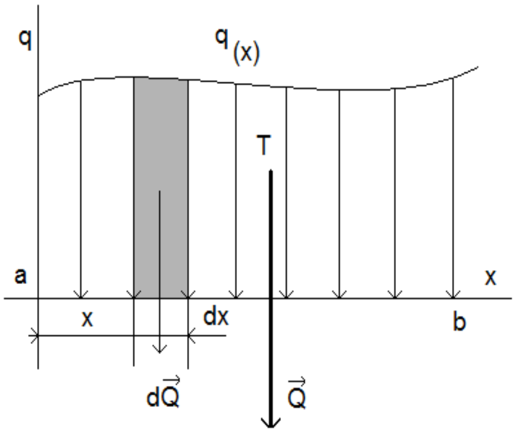
$$q(x) = \frac{dQ}{dx} \left(\frac{N}{m}\right) \qquad (6.4)$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

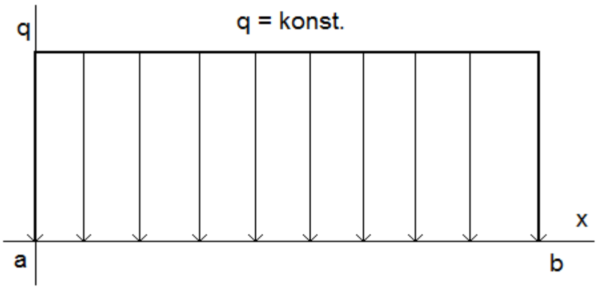
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Je-li q(x) = konst., jde o spojité rovnoměrné zatížení (obr. 6.2 a 6.3)



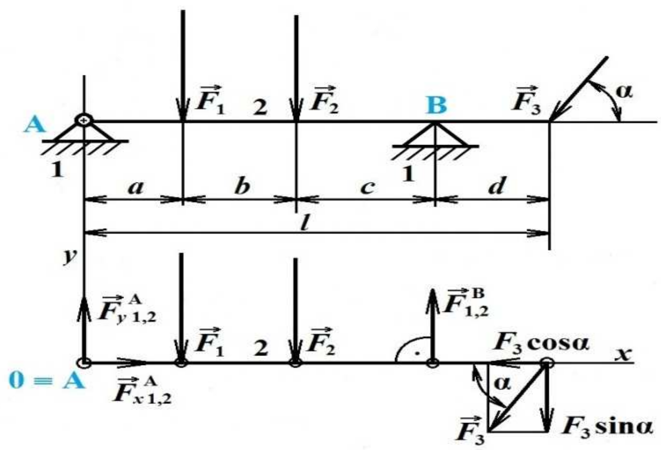
Obr. 6.2 Spojité nerovnoměrné zatížení



Obr. 6.3 Spojité rovnoměrné zatížení

6.3 Staticky určitá úloha

Na obr. 6.4 je těleso nosníku 2 zatížené třemi osamělými silami $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ a je podepřeno rotační podpěrou A a obecnou podpěrou B. Podepření odnímá tři stupně volnosti a představuje tři neznámé $F^A_{x1,2}$, $F^A_{y1,2}$, $F^B_{1,2}$. Úloha je staticky určitá.



Obr. 6.4 Staticky určitá úloha

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

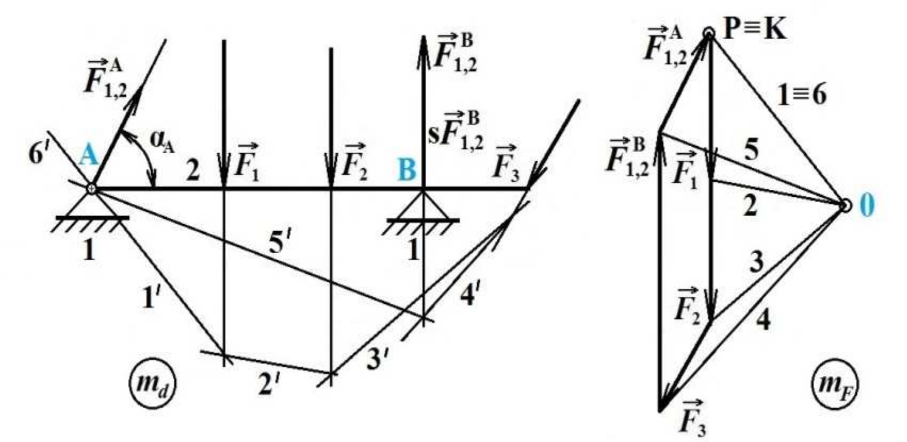
Neznámé vyřešíme z rovnic statické rovnováhy:

$$\sum_1^n F_{ix} = 0 \ldots\ldots F_{x1,2}^A - F_3 \cos\alpha = 0 \tag{6.5}$$

$$\sum_1^n F_{iy} = 0 \ldots\ldots F_{y1,2}^A - F_1 - F_2 - F_3 \sin\alpha + F_{1,2}^B = 0 \tag{6.6}$$

$$\sum_1^n M_{iA} = 0 \ldots\ldots F_{1,2}^B(a+b+c) - F_1 a - F_2(a+b) - F_3 \sin\alpha\, l = 0 \tag{6.7}$$

Grafické řešení provedeme opět v měřítku délek m_d a měřítku sil m_F pomocí pólového obrazce a výslednicové čáry.



Obr. 6.5 Grafické řešení

Vektorová podmínka rovnováhy má tvar:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_{1,2}^B + \vec{F}_{1,2}^A = \vec{0} \tag{6.8}$$

V rovnici označíme podtržením s šipkou dané síly $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, prostým podtržením s tečkou reakci $\vec{F}_{1,2}^B$, u níž známe nositelku s působištěm a tečkou reakci $\vec{F}_{1,2}^A$, u níž známe působiště A.

Po nakreslení tělesa 2 a jeho zatěžujících sil v měřítku délek kreslíme silový obrazec v měřítku sil tak, že zvolíme jeho počáteční bod P a vyneseme za sebou síly $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$.

Do koncového bodu síly $\vec{F}_3$ připojíme podle vektorové rovnice rovnoběžku se směrem nositelky neznámé reakce $s\vec{F}_{1,2}^B$. Pak volíme pól 0 a zakreslíme pólové paprsky 1, 2, 3, 4. Abychom mohli uzavřít výslednicovou čáru, vedeme její první paprsek 1‘ bodem A – jako jediným známým bodem nositelky reakce $\vec{F}_{1,2}^A$.

Další paprsky výslednicové čáry kreslíme obvyklým způsobem.

Po vynesení paprsku 4‘ vyšetříme jeho průsečík s nositelkou reakce s$\vec{F}_{1,2}^{B}$. Spojnice tohoto průsečíku s bodem A určuje paprsek 5‘. V pólovém obrazci doplníme pólový paprsek 5 rovnoběžný s paprskem 5‘ výslednicové čáry. Pólový paprsek 5 určuje koncový bod reakce $\vec{F}_{1,2}^{B}$.

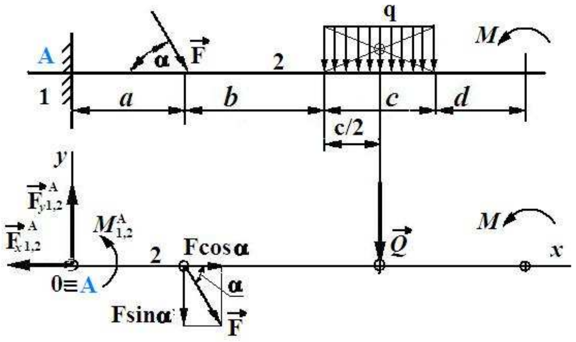
Uzavřením silového obrazce tak, aby K ≡ P, vyplývá směr, smysl a velikost reakce $\vec{F}_{1,2}^{A}$.

6.3.1 Jiný typ staticky určité úlohy

Ze silového trojúhelníka určíme velikosti neznámých reakcí a jejich smysly. Podle smyslu reakce $\vec{F}_{1,2}^{B}$ poznáme, na které straně se páka 2 musí opírat v místě B o rám 1, aby byla splněna podmínka silového styku v obecné podpěře (po pravé straně). Skutečné hodnoty reakcí určíme opět pomocí měřítka sil.

Na obr. 6.6 je těleso 2 uloženo nepohyblivě na rámu 1 a zatíženo osamělou silou $\vec{F}$, spojitým rovnoměrným zatížením q a osamělým momentem M. Jde o jednostranně vetknutý nosník. V místě A, kde je nosník pevně uložený, vzniknou tři reakce $\vec{F}_{x1,2}^{A}$, $\vec{F}_{y1,2}^{A}$, $\vec{M}_{1,2}^{A}$. Vzhledem ke třem rovnicím statické rovnováhy se jedná o úlohu staticky určitou.

Souřadnicový systém 0, x , y volíme tak, aby 0 ≡ A . Šikmou sílu nahradíme v působišti jejími složkami ve směrech x a y. Spojité rovnoměrné zatížení q na délce c nahradíme celkovým břemenem $Q = qc$ v těžišti plochy zatěžovacího diagramu (v tomto případě plochy obdélníka).



Obr. 6.6 Spojité rovnoměrné zatížení ve staticky určité úloze

Rovnice statické rovnováhy jsou:

$$\sum_1^n F_{ix} = 0 \ldots\ldots F\cos\alpha - F_{x1,2}^{A} = 0 \qquad (6.9)$$

$$\sum_1^n F_{iy} = 0 \ldots\ldots F_{y1,2}^{A} - F\sin\alpha - qc = 0 \qquad (6.10)$$

$$\sum_1^n M_{iA} = 0 \ldots\ldots M_{1,2}^{A} - F\sin\alpha\, a - qc\left(a + b + \frac{c}{2}\right) + M = 0 \qquad (6.11)$$

Řešením soustavy těchto rovnic obdržíme neznámé $F_{x1,2}^{A}$, $F_{y1,2}^{A}$, $M_{1,2}^{A}$.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ