11. Dynamika 1

11.1 Úvod do dynamiky

Dynamika je částí mechaniky, která se zabývá studiem pohybu hmotných bodů a těles při působení sil. V dynamice se řeší takové případy, kdy síly působící na dokonale tuhá tělesa nejsou v rovnováze.

Zkoumáme-li pohyb hmotných bodů, případně soustav hmotných bodů, které můžeme v některých případech za hmotný bod považovat, pomineme-li rozložení hmotnosti. V takových případech soustředíme hmotnost soustavy (tělesa) do jednoho hmotného bodu (dále jen bodu) – *těžiště*. Nejdříve se tedy zabýváme pohybem bodu a výsledky pak zobecníme na soustavu bodů, tj. těleso. Každý pohyb bodu se děje za působení sil, které mohou mít různou podobu. Například tíha bodu, síla v pružině, která je jedním koncem upevněna k bodu a druhým se opírá o pevný základní prostor, odpor prostředí nebo síla vyvinutá hnací jednotkou. Uvedené síly nazýváme *vnějšími silami*; tyto síly bod uvádějí do pohybu nebo jej v něm udržují – jsou to *hnací síly.*

Závislost mezi silami působícími na pohybující se bod a kinematickými veličinami, tj. zrychlením *(a),* které bodu o hmotnosti *m* přísluší, je dána Newtonovým pohybovým zákonem:

$$F_z = m \, . \, a \tag{10.1}$$

Síla *m . a,* která je rovna výslednici všech sil, je tzv. *zrychlující síla.*

Z kinematiky je známo, že při křivočarém pohybu bodu existuje *obecně vždy zrychlení.* Pouze u přímočarého pohybu se může pohyb dít s konstantní rychlostí, tj. $a = 0$.

V dynamice budeme řešit úlohy, kdy pro předepsaný pohyb s danými kinematickými veličinami určujeme potřebnou vnější sílu, nebo při známých vnějších silách vyšetřujeme rychlosti a zrychlení.

Při řešení úloh dynamiky využijeme dřívějších znalostí ze statiky a kinematiky. Z hlediska kinematiky, tedy i dynamiky, je nejjednodušším pohybem přímočarý pohyb bodu. Podobně jako v kinematice použijeme i v dynamice mnohých výsledků, které platí pro přímočarý, křivočarý, posuvný a otáčivý pohyb.

V běžné technické praxi se většinou setkáme s rychlostmi, pro něž platí zákony klasické mechaniky, tj. Newtonovy pohybové zákony. V minulém století se však ukázalo, že u jevů, které probíhají při velkých rychlostech, blížící se rychlosti světla ($c = 3.10^8$ $m.s^{-1}$), nelze použít zákonitosti klasické mechaniky, ale teorii, kterou formuloval Albert Einstein.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

11.2 Přímočarý pohyb bodu

Přímočarý pohyb bodu je tím nejjednodušším případem pohybu. Rychlost i zrychlení mají směr dráhy bodu. Při vedení bodu se jedná z hlediska statiky o nucený pohyb. Vedení může mít různou podobu, vždy však působí odpor proti pohybu, jeho příčinou jsou hnací síly. Obecně je možno takový jev vyjádřit vztahem:

$$\sum_i F_{ti} - F_n \, . \, \mu = m . a \tag{10.2}$$

Kde:
$\sum_i F_{ti}$ - je algebraický součet všech složek vnějších sil působících ve směru dráhy včetně odporu prostředí,
$\sum_i F_n \, . \, \mu$ - smykové tření (μ *je součinitel smykového tření*).

Takto sestavená rovnice pro příslušný směr pohybu se nazývá *pohybová rovnice.*

11.3 Svislý pohyb volného bodu

Při svislém pohybu hmotného bodu, pouze za působení vlastní tíhy ***G,*** kterou v tomto případě považujeme za zrychlující sílu, jež je projevem zemské přitažlivosti a udílí (gravitační) zrychlení ***g*** (tíhová síla není stálá, mění se s tíhovým zrychlením, které je různé v různých zeměpisných šířkách; u nás $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$, počítáme se zaokrouhlením $g = 10\ m.s^{-2}$), má pohybová rovnice tvar (při zanedbání odporu prostředí):

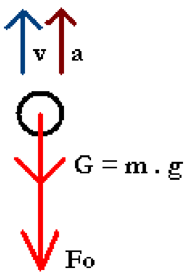
$$G = m \, . \, g \tag{10.3}$$

Příkladem může být *vrh svislý vzhůru*, který probíhá v atmosféře, proti pohybu působí i odpor prostředí. Pohybová rovnice má tvar:

$$-G - F_o = m \, . \, a \tag{10.4}$$
$$-m \, . \, g - F_o = m \, . \, a \tag{10.5}$$

Při pohybu ve vakuu je $F_o = 0$, potom $-g = a$, pohyb se děje s konstantním zrychlením, které je co do velikosti rovno tíhovému zrychlení. Pro *svislý pohyb dolů* s odporem má pohybová rovnice tvar:

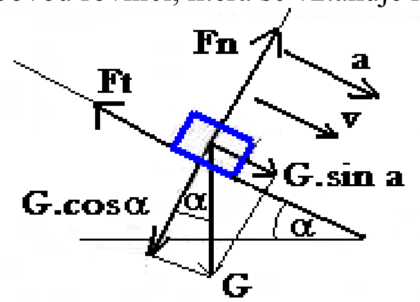
$$G - F_o = m \, . \, a \tag{10.6}$$
$$m \, . \, g - F_o = m \, . \, a \tag{10.7}$$



Obr. 10.1 Vrh svislý

11.4 Pohyb bodu po nakloněné rovině

Nejprve je nutné sestavit pohybovou rovnici, která se vztahuje k následujícímu obrázku.



Obr. 10.2 Pohyb bodu po nakloněné rovině

Sestavení pohybové rovnice:

$$G \,.\sin\alpha - F_T = m\,.\,a \qquad (10.8)$$

kde F_T je třecí síla, m – hmotnost (kg), a – zrychlení (m.s^{-2}).

Složková rovnice ve směru kolmém na nakloněnou rovinu:

$$-G\,.\cos\alpha + F_n = 0 \qquad (10.9)$$

$$F_n = G\,.\cos\alpha \qquad (10.10)$$

kde F_n je normálová síla.

Ze statistických metodických výpočtů je známo, že:

$$F_T = F_n\,.\,\mu \qquad (10.11)$$

$$G = m\,.\,g \qquad (10.12)$$

Z předchozích rovnic lze usuzovat následující vyjádření:

$$m\,.\,g\,.\sin\alpha - m\,.\,g\,.\,\mu\,.\cos\alpha = m\,.\,a \qquad (10.13)$$

$$a = g\,.\,(\sin\alpha - \mu\,.\cos\alpha) \qquad (10.14)$$

Kromě pasivních odporů lze při pohybu na nakloněné rovině přihlédnout i k odporům prostředí $\boldsymbol{F_o}$, *které* působí rovněž proti pohybu. Po úpravě (převedeme zrychlující sílu $F_z = m.\,a$ na levou stranu rovnice), tak potom dostaneme následující výraz:

$$\sum_i F_{ti} - F_o - m\,.\,a = 0 \qquad (10.15)$$

Tímto jsme uvedli těleso do rovnovážného stavu, tj. připojili jsme k působícím silám sílu stejné velikosti jako je zrychlující síla, ale opačné orientace (podle zákona akce a reakce). Tato síla doplňuje původní síly na rovnovážný stav a nazývá se *setrvačná síla* $\boldsymbol{F_s}$. Její další účel uvedeme později.

11.5 Mechanická práce

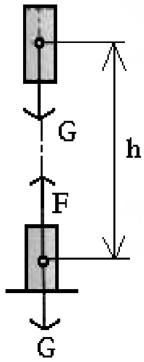
Pohybuje-li se bod nebo těleso po určité dráze, působí na něj určitá hnací síla. Protože těleso klade proti pohybu odpor, je nutno tento odpor překonat. Překonáváme-li odpory silou po určité dráze, konáme *mechanickou práci.* Práce je fyzikální veličina vyjadřující dráhový účinek síly.

Mechanická práce je rovna součinu síly a dráhy ve směru síly, značíme ji ***W***. Její jednotkou je 1 *joule (J);* je to práce, kterou vykoná stálá síla velikosti 1N působící na dráze 1m ve směru síly.

Práce stálé síly ve směru dráhy:

Zdvíháme-li těleso o tíze ***G*** do určité výšky ***h***, musíme působit silou překonávající odpor tíhy po dráze ***h***, a tím konáme mechanickou práci. Tato práce bude tím větší, čím větší bude tíha tělesa a jeho dráha. Proto platí následující vztah:

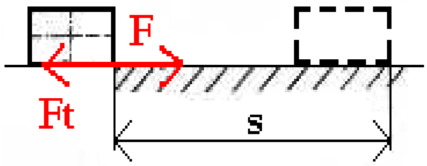
$$W = G\,.\,h \qquad (10.16)$$



Obr. 10.3 Práce síly ve směru dráhy

Obdobně konáme mechanickou práci, překonáváme-li odpory při pohybu po dráze v jiném směru než svislém. Táhneme-li např. těleso po vodorovné podložce, musíme překonávat odpor tření. Musíme vyvinout stejně velkou sílu ***F***, jako je třecí síla $\boldsymbol{F_T}$, a to ve směru pohybu dráze ***s***:

$$W = F\,.\,s \qquad (10.17)$$



Obr. 10.4 Pohyb na vodorovné podložce

11.6 Výkon

Výkon P je mechanická práce vykonaná za jednotku času:

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$P = \frac{W}{t} \tag{10.18}$$

Jednotkou výkonu je 1 watt (W). *Watt* je výkon, při němž se vykoná práce 1 joulu za 1 sekundu (1W = 1 J . s^{-1}).

V praxi se velmi často uvádí také násobky jednotky výkonu:

1 kilowatt $1kW = 10^3 W$
1 megawatt $1MW = 10^6\ W = 1000\ kW$

Koná-li práci síla stálé velikosti ve směru pohybu tak, že se bod nebo těleso pohybuje rovnoměrně rychlostí *v* = *s/t*, můžeme vyjádřit výkon takto:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F\ .\ s}{t} = F\ .\ v \tag{10.19}$$

tedy v tomto případě je výkon dán součinem síly a rychlosti.

Při stálém výkonu je součin síly a rychlosti stálý, což se využívá u pracovních strojů s hlavním pohybem kruhovým (elektromotor, soustruh, fréza). Při malé obvodové síle je zde velká obvodová rychlost, a naopak při malé obvodové rychlosti velká obvodová síla.

Výkon člověka je 70 – 80 W, výjimečně na krátkou dobu až desetkrát větší, výkon např. žehličky je přibližně 1200 W, elektrického sporáku asi 4 200 W, elektrické lokomotivy 3 400 kW.
Ze základní rovnice pro výkon můžeme vyjádřit práci jako:

$$W = P\ .\ t \tag{10.20}$$

Z tohoto vztahu dostaneme další jednotky pro práci, odvozené z jednotek pro výkon a čas:

1 wattsekunda *1Ws = 1 J*
1 watthodina *1Wh = 3 600 J*
1 kilowatthodina *1kWh = 3 600 000 J = 3,6 MJ*

Působí-li síla ***F*** stálé velikosti ve směru tečny ke kruhové dráze *s* (na klice, řemenici, ozubeném kole apod.) můžeme při známém poloměru dráhy ***R*** a známém počtu otáček ***n*** vypočítat výkon této obvodové síly ze vztahu:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F\ .s}{t} = F\ .\ v = F\ .2\pi Rn = M_k\ .2\pi n = M_k\ .\ \omega \tag{10.21}$$

kde v – je obvodová rychlost (m.s^{-1}), M_k = F. R (N. m) – kroutící moment, ω – úhlová rychlost (rad.s^{-1}).

V technické praxi často vyjadřujeme z uvedeného vztahu kroutící moment $\boldsymbol{M_k}$:

$$M_k = \frac{P}{2\pi n} = \frac{P}{\omega} \tag{10.22}$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE esf MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

11.7 Mechanická energie

Každé těleso je schopno konat práci, jestliže se buď pohybuje, anebo se může pohybovat. Například padající beran může zatloukat kůly, proudící voda roztáčí vodní turbíny, pára parní turbíny atd.

Rozlišujeme různé formy energie, mechanickou, tepelnou, elektrickou, světelnou, chemickou, jadernou, energii magnetického pole aj.

Velikost energie posuzujeme podle velikosti práce, kterou může hmotný bod, příp. Těleso vykonat. Proto i *jednotky energie jsou stejné jako jednotky práce*. Ve strojírenské praxi je nejdůležitější *mechanická energie.* Celková mechanická energie hmotného bodu, příp. tělesa nebo mechanické soustavy, je součtem *energie polohy (potencionální) a pohybové (kinetické) energie.*

Energie polohy

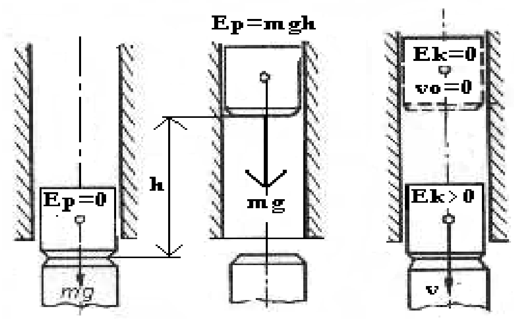
Zdvihneme-li těleso (např. beran bucharu) o hmotnosti *m* do výšky *h*, vykonáme práci:

$$W = m \, . \, g \, . \, h \tag{10.23}$$

Těleso má v této nové poloze schopnost vykonat tutéž práci, tzn., že pro jeho potenciální energii E_p platí:

$$E_p = m \, . \, g \, . \, h$$

Obdobně na stlačení pružiny je potřebná *přetvárná (deformační) práce,* tj. práce potřebná k přetvoření (deformaci) tělesa. Touto prací vnější síly získá pružina *energii napjatosti*, tedy také potenciální energii, protože při uvolnění zatěžující síly se pružina vrací do původního stavu, a tím uvolňuje dodanou vnější práci.



Obr. 10.5 Pohyb berana bucharu

Pohybová (kinetická) energie

Začne-li síla $\boldsymbol{F_z}$ obecného směru a různé velikosti působit na volný bod hmotnosti $\boldsymbol{m}$, který se pohybuje po přímce $\boldsymbol{p}$ rovnoměrnou rychlostí $\boldsymbol{v_o}$, způsobí okamžitou změnu původního pohybu na pohyb nerovnoměrný křivočarý. U volného bodu nejsou reakční účinky s pasivními odpory, proto je tato původní síla zrychlující silou $\boldsymbol{F_z}$. Zrychlující síla způsobí absolutní zrychlení $\boldsymbol{a}$ pohybu. V daném bodě $\boldsymbol{A}$ rozložíme sílu $\boldsymbol{F_z}$ na tečnou složku $\boldsymbol{F_t}$ a k ní kolmou normálovou složku $\boldsymbol{F_n}$. Každá z těchto složek má na bod samostatný účinek. Tečná složka vyvolává u bodu tečné zrychlení $\boldsymbol{a_t}$, které udává změnu velikosti rychlosti, normálová síla se zrychlením $\boldsymbol{a_n}$ způsobuje změnu směru pohybu. Platí, že:

$$F_t = m \,.\, a_t = m \,.\, \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{10.24}$$

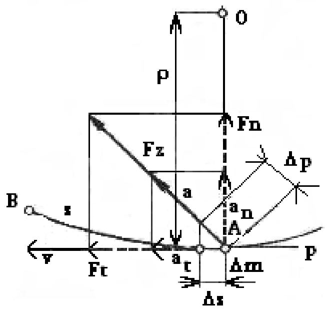
$$F_n = m \,.\, a_n = m \,.\, \frac{v^2}{\rho}, kde\ \rho = \ |OA| \tag{10.25}$$

Bod urazí působením zrychlující síly $\boldsymbol{F_z}$ za čas $\boldsymbol{t}$ dráhu $\boldsymbol{s}$. Na konci této dráhy v bodě B bude mít rychlost $v > v_o$. Změna rychlosti, a tím i změna energie pohybu bodu, je výsledkem práce zrychlující síly $\boldsymbol{F_z}$ na dráze $\boldsymbol{s}$. Protože složka $\boldsymbol{F_n}$ zrychlující síly $\boldsymbol{F_z}$ je vždy kolmá k trajektorii pohybujícího se bodu, nekoná práci. Pro zjištění práce zrychlující síly stačí tedy určit práci její tečné složky $\boldsymbol{F_t}$. Platí:

$$\Delta W = \ F_t \,.\, \Delta s = \ F_z \,.\, \Delta p \tag{10.26}$$

kde Δp je velmi malá (elementární) dráha ve směru síly $\boldsymbol{F_z}$.

$$F_t \,.\, \Delta s = \ \frac{1}{2}\, m \,.\, (\Delta v^2) \tag{10.27}$$



Obr. 10.6 Pohyb volného bodu působením zrychlující síly F_z

Celková práce síly $\boldsymbol{F_z}$ na dráze $\boldsymbol{s}$ z bodu $\boldsymbol{A}$ do bodu $\boldsymbol{B}$ je dána výrazem:

$$W \ = \ \sum \Delta\, F_{ti} \,.\, \Delta s_i \ = \ \frac{1}{2}\, mv^2 - \frac{1}{2}\, mv_0^2 \tag{10.28}$$

Přírůstek pohybové energie hmotného bodu mezi dvěma polohami je dán prací zrychlující síly.

Začne-li se bod hmotnosti $\boldsymbol{m}$ pohybovat obecným pohybem vlivem stálé zrychlující síly $\boldsymbol{F_z}$, potom za určitý čas vykoná dráhu $\boldsymbol{s}$, na jejímž konci bude mít rychlost $\boldsymbol{v}$ zrychlující síla vykoná práci:

$$W \ = \ F_z \,.\, s \ \rightarrow \ F_z = m \,.\, a \tag{10.29}$$

a uvažujeme-li rovnoměrně zrychlený pohyb, platí $s = v^2/2a$, takže po dosazení získáme vztah:

$$W \ = \ F_z \,.\, s = m \,.\, a \,.\, \frac{v^2}{2a} = \ \frac{1}{2}\, m \,.\, v^2 = \ E_k \tag{10.30}$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

kde E_k je *pohybová energie.*

Každému bodu, příp. tělesu (např. bucharu padajícímu z výšky ***h*** dle obr. 19), přísluší za pohybu jistá pohybová energie, úměrná druhé mocnině okamžité rychlosti.
Vycházeli jsme z předpokladu, že počáteční rychlost v_0 byla rovna nule; nebude-li v_0 rovno nule, je počáteční pohybová energie:

$$E_{k0} = \frac{1}{2}\, m\,.\,v_0^2 \tag{10.31}$$

Jestliže se rychlost pohybujícího se bodu, příp. tělesa, zvýší působením zrychlující síly $\boldsymbol{F_z}$ po dráze ***s*** na konečnou rychlost ***v,*** má těleso na konci pohybu pohybovou energii:

$$E_k = \frac{1}{2}\, m\,.\,v^2 \tag{10.32}$$

Práce zrychlující síly $\boldsymbol{F_z}$ na dráze ***s*** způsobila přírůstek pohybové energie:

$$W = F_z\,.\,s = E_k - E_{k0} = \frac{1}{2}\, m\,.\,v^2 - \frac{1}{2}\, m\,.\,v_0^2 = \frac{1}{2}\, m\,.\,(v^2 - v_0^2) \tag{10.33}$$

Stejný výsledek získáme dosazením $F = m.a$ a také $s = (v^2 - v_0^2)/2a$.

Lze tedy říci, že zrychlení (zpoždění) práce síly na dokonale tuhém tělese, popř. bodě, je rovna přírůstku (úbytku) pohybové energie. Abychom mohli porovnávat energie různých těles, vztahujeme energii ***E*** na objemovou jednotku ***V*** tělesa a užíváme pojem objemová *hustota energie **w:***

$$w = \frac{E}{V}\ (J\,.\,m^{-3}) \tag{10.34}$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ