12. Dynamika 2

12.1 Pohyb tělesa po vodorovné rovině

Vázaný pohyb tělesa
Když se těleso o hmotnosti ***m*** nestýká za pohybu s jiným tělesem, jedná se o ***volný pohyb.***

Vázaný pohyb tělesa o hmotnosti ***m*** je pohyb omezený ***vazebnými podmínkami,*** tj. podmínkami, jež omezují pohyblivost mechanické soustavy (někdy tento pojem zahrnuje i mechanické zařízení, jímž se toto omezení uskutečňuje). Vazebná podmínka je vyjádřena rovnicí, příp. nerovností, která přistupuje jako vedlejší podmínka k pohybovým rovnicím.

Například vlak se pohybuje po kolejích, křižák ve vedení, kyvadlo se kýve kolem pevného bodu. Je-li těleso vázáno např. na vedení, působí toto vedení na těleso *vazebnou silou či reakcí* vedení. Při výpočtu vázaného pohybu uvolníme těleso tak, že odstraníme omezující podmínky a připojíme k akčním silám reakce, jakými na těleso působila podpora nebo závěs. Složky reakcí kolmé na vedení tzv. *normálové složky,* označujeme F_n, tečné složky F_t. Uvolněné těleso uvažujeme jako pohyb volného tělesa o hmotnosti ***m***.

Pohyb tělesa po vodorovné rovině

1. **Hnací síla působí rovnoběžně s rovinou**

Těleso se pohybuje rovnoměrnou rychlostí v_0 nebo je v klidu. Od určitého okamžiku na ně začne působit ***F*** rovnoběžná s vodorovnou rovinou. Těleso uvolníme zavedením reakce podpory F_r. Na uvolněné těleso působí síly ***F, mg,*** F_r. Reakce F_r o složkách F_n a F_t je odkloněna od normály o třecí úhel φ. Pokud jsou tyto tři síly v rovnováze je těleso v klidu nebo v rovnovážném přímočarém pohybu.

Je-li ***F*** $> F_t$, nastává pohyb převahou síly ***F,*** tj. zrychlující silou F_z. Připojením setrvačného odporu uvedeme těleso do rovnováhy a lze nakreslit silový mnohoúhelník – v jednom smyslu uzavřený.

Využijeme silový mnohoúhelník pro početní řešení. Platí podmínky rovnováhy ve směru os X a Y:

$$\sum F_x = 0; \quad F - F_t - ma = 0; \quad a = \frac{F - F_t}{m} \tag{12.1}$$

$$\sum F_y = 0; \quad mg - F_n = 0; \tag{12.2}$$

Platí $F_T = \mu F_n = \mu mg$, kde μ je součinitel tření, tedy:

$$a = \frac{F}{m} - \mu \cdot g \tag{12.3}$$

Bude-li ***F*** a μ konstantní, bude i zrychlení ***a*** stálé. Pohyb tělesa bude rovnoměrně zrychlený, počáteční rychlost v_0 se po určité době zvýší na koncovou rychlost ***v.***

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost · Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Těleso urazí dráhu $s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$,

tedy $v = \sqrt{v_0^2 + 2as}$ nebo také lze napsat ve tvaru $v = \sqrt{v_0^2 + 2s(\frac{F}{m} - \mu g)}$

Jde-li o pohyb z klidu, je nutno do rovnice dosadit $v_0 = 0$.

Je-li $\boldsymbol{F} < \boldsymbol{F_t}$ a pohybuje –li se těleso ve smyslu síly $\boldsymbol{F}$**,** jde o rovnoměrně zpožděný pohyb. Rychlost i pohybová energie se zmenšuje.

Je-li $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_t}$, pak $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ a těleso buď v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrně. V případě $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ dochází k u pohybujícího se tělesa k rovnoměrnému zpožďování třením až do úplného zastavení. Koncovou rychlost po určité proběhnuté dráze lze určit rovněž pomocí zákona o změně pohybové energie:

$$F_z\,.\,s = \frac{1}{2}\,m\,(v^2 - v_0^2) \qquad (12.4)$$

$$F_z = F - F_t \qquad (12.5)$$

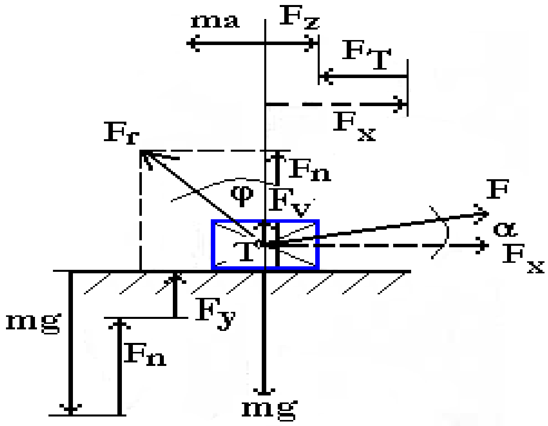
$$F_t = \mu m g \qquad (12.6)$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2s\,\frac{F - \mu m g}{m}} \qquad (12.7)$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2s\,(\frac{F}{m} - \mu g)} \qquad (12.8)$$

2. <u>**Hnací síla působí v obecném směru**</u>

Z následujícího obrázku 12.1 je patrné, že následující případ se od předchozího případu, kdy hnací síla působí rovnoběžně s rovinou, liší pouze tím, že hnací síla $\boldsymbol{F}$ je odkloněna od vodorovné roviny o úhel $\boldsymbol{\alpha}$. Postup řešení je v následujícím případu podobný jako v předchozím.



Obr. 12.1 Pohyb tělesa po vodorovné rovině

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

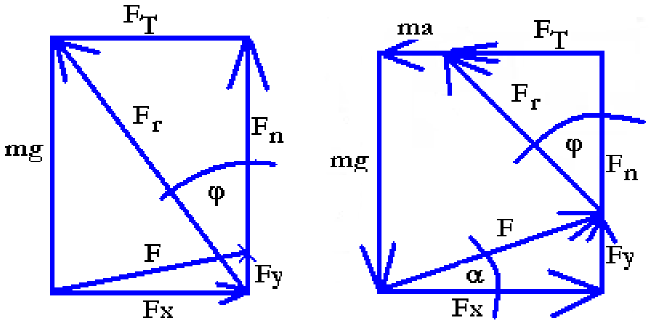
EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr. 12.2 Hnací síla v obecném směru

Jak je zřejmé z předchozího obrázku 12.2 (levý), je bod v klidu nebo v rovnoměrném zrychleném pohybu (12.2 pravý). Uvažujeme setrvačnou sílu a těleso uvedeme do rovnováhy.

$$\sum F_x = 0; \qquad F_x - F_T - ma = 0; \qquad a = \frac{F_x - F_T}{m} \tag{12.8}$$

$$\sum F_y = 0; \qquad F_y + F_n - mg = 0; \qquad F_n = mg - F_y \tag{12.9}$$

$$F_x = F\,.\cos\alpha\,; \qquad F_y = F\,.\sin\alpha\,; \qquad F_n = mg - F\,.\sin\alpha \tag{12.10}$$

$$F_T = \mu F_n; \qquad F_T = \mu\,(mg - F\,.\sin\alpha) \tag{12.11}$$

Takže po dosazení získáme následující rovnici:

$$a = \frac{F\,.\cos\alpha - \mu mg + \mu F\,.\sin\alpha}{m} = \frac{F}{m}\,(\cos\alpha + \mu\,\sin\alpha) - \mu g \tag{12.12}$$

Pokud se $v = \sqrt{v_0^2 + 2as}$, získáme po dosazení výslednou rychlost:

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2Fs}{m}\,[(\cos\alpha + \sin\alpha) - \mu g]} \tag{12.13}$$

Je zřejmé, že při stálé síle ***F*** je pohyb závislý na hodnotě úhlu ***α*** , který se může měnit od 0° do 360°.

Pohyb tělesa po nakloněné rovině

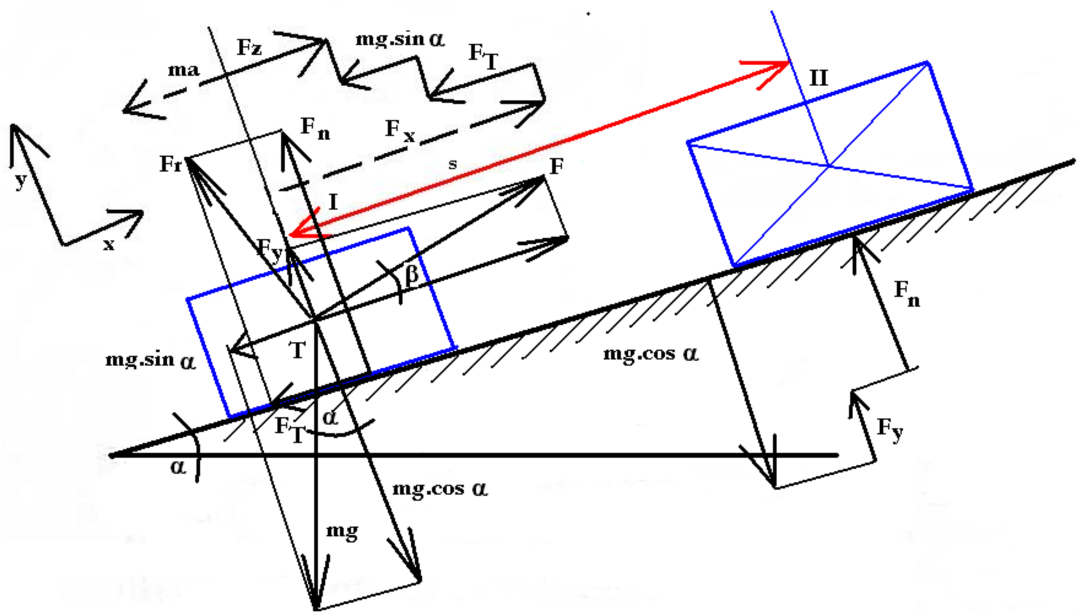
Na těleso ***M***, které se pohybuje po nakloněné rovině (α je úhel naklonění roviny) vkladném směru osy ***x***, začne působit síla ***F*** odkloněná od osy ***x*** o úhel ***β***.

Pro následující obrázek budou platit obdobné principy výpočtu jako ve dvou předchozích příkladech, jen je nutné upravit rovnice tak, že se těleso ***M*** nachází na nakloněné rovině. Tedy na jiné „podložce“ než při pohybu na vodorovné rovině.

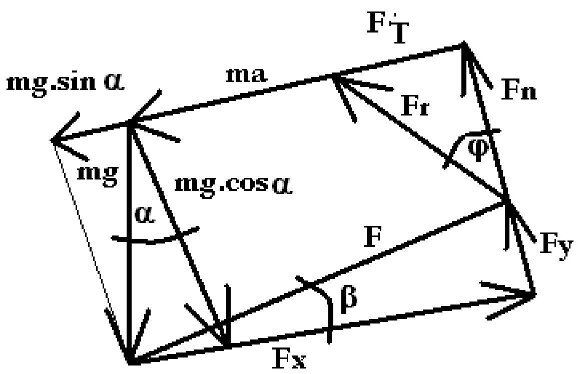
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr. 12.3 Pohyb tělesa po nakloněné rovině



Obr. 12.4 Bod nakloněné roviny

Těleso uvolníme tím, že odstraníme podporu a připojíme reakci podpory $\boldsymbol{F_r}$. Na uvolněné těleso působí síly ***mg, F,*** $\boldsymbol{F_r}$.

V ose ***x*** rovnoběžné s nakloněnou rovinou působí síly:

$F_x = F\,.\cos\beta\,;\qquad mg\,.\sin\alpha\,;\qquad F_T = \mu F_n$ (12.14)

v ose ***y*** kolmé na osu ***x*** působí síly:

$F_y = F\,.\,\sin\beta\,;\qquad mg\,.\cos\alpha\,;\qquad F_n$ (12.15)

Podmínka rovnováhy sil na tělese v ose ***y***:

$\sum F_y = 0;\qquad mg\,.\cos\alpha - F\,.\sin\beta - F_n = 0;\qquad F_n = mg\,.\cos\alpha - F\,.\sin\beta$ (12.16)

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

S přihlédnutím k d´Alembertově principu je podmínka rovnováhy sil na tělese v ose ***x:***

$$\sum F_x = 0; \qquad F\,.\cos\beta - \mu F_n - mg.\sin\alpha - ma = 0 \tag{12.17}$$

Odtud vypočítáme hodnotu ***a***:

$$a = \frac{F\,.\cos\beta - \mu mg\,.\cos\alpha + \mu F\,.\sin\beta - mg\,.\sin\alpha}{m} \tag{12.18}$$

$$a = \frac{F}{m}\,(\cos\beta + \mu\,.\sin\beta) - g(\mu\,.\cos\alpha + \sin\alpha) \tag{12.19}$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ