

2.Cvičení–mechanika

Vkinematice je pro studenty velmi důležitý vztah mezi polohou, rychlostí a zrychlením. Tak jak bylo uvedeno v přednášce, mezi těmito veličinami existuje vztah, který popisuje matematické operace *derivace* a *integrace*.

Jakbylo uvedeno v materiálech pro přednášky, tak platí:

$$\begin{aligned}x(m) &\rightarrow v(ms^{-1}) \rightarrow a(ms^{-2}) \text{ výpočetní postup DERIVACE} \\x(m) &\leftarrow v(ms^{-1}) \leftarrow a(ms^{-2}) \text{ výpočetní postup INTEGRACE}\end{aligned}$$

Příklad1.

Určete velikost rychlosti a zrychlení v čteně jejích složek v čase $t=0,8$ s. Vestejném čase $t=0,8$ s zakreslete vektory rychlosti a zrychlení v pravouhlém souřadnicovém systému. Polohový vektor hmotného bodu je dán rovnicí:

$$\vec{r}(t) = \frac{A}{t^2} \vec{i} + B t^2 \vec{j} + C t^3 \vec{k}$$

$$\text{Kde } A=4ms^{-2}; B=-8ms^{-2}; C=2ms^{-3}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2At^{-3} \cdot \vec{i} + 2Bt \cdot \vec{j} + 3Ct^2 \cdot \vec{k} = -\frac{8}{t^3} \cdot \vec{i} - 16t \cdot \vec{j} + 6t^2 \cdot \vec{k}$$

$$v_x = -\frac{8}{t^3} \cdot \vec{i} = -15,625m \cdot s^{-1}$$

$$v_y = -16t \cdot \vec{j} = -12,8m \cdot s^{-1}$$

$$v_z = 6t^2 \cdot \vec{k} = 3,84m \cdot s^{-1}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \underline{20,56m \cdot s^{-1}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 24t^{-4} \cdot \vec{i} - 16 \cdot \vec{j} + 12t \cdot \vec{k}$$

$$a_x = 24t^{-4} \cdot \vec{i} = 58,6m \cdot s^{-2}$$

$$a_y = -16 \cdot \vec{j} = -16m \cdot s^{-2}$$

$$a_z = 12t \cdot \vec{k} = 9,6m \cdot s^{-2}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \underline{64,5m \cdot s^{-2}}$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad2.

Jedánaravnicezrychlení,vypo čítejtest řednírychlost,st řednízrychlení,polohuve3a5s.

$$a = 2t^3 - 3 \qquad v_0 = 2m \cdot s^{-1}; x_0 = 5m; t = 0,5s$$

$$v = \int a dt = \int (2t^3 - 3)dt = \frac{2}{3}t^3 - 3t + C_1 \Rightarrow C_1 = v_0$$

$$v = \frac{2}{3}t^3 - 3t + 2 \Rightarrow v_{(0,5)} = \underline{\underline{0,58m \cdot s^{-1}}}$$

$$x = \int v dt = \int (\frac{2}{3}t^3 - 3t + 2)dt = \frac{t^4}{6} - \frac{3}{2}t^2 + 2t + C_2 \Rightarrow C_2 = x_0$$

$$x = \frac{t^4}{6} - \frac{3}{2}t^2 + 2t + 5 \Rightarrow x_{(0,5)} = \underline{\underline{5,64m}}$$

$$t_1 = 3s: \quad x = \frac{3^4}{6} - \frac{3}{2} \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 5 = 11m; \quad v_1 = 11m \cdot s^{-2}$$

$$t_2 = 5s: \quad x = \frac{5^4}{6} - \frac{3}{2} \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 5 = 81,66m; \quad v_2 = 70,3m \cdot s^{-2}$$

$$v_s = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{81,66 - 11}{5 - 3} = \underline{\underline{35,33m \cdot s^{-2}}}$$

$$a_s = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{70,3 - 11}{5 - 3} = \underline{\underline{29,66m \cdot s^{-2}}}$$

Příklad3.

Vypočítejte jednotlivé složky rychlosti, celkovou velikost rychlosti a úhly svírající vpravoúhlém souřadnicovém systému jednotlivé složky rychlosti s osami x, y, z. Stejně tak spočítejte složky zrychlení, celkové zrychlení a úhly svírající vpravoúhlém souřadnicovém systému jednotlivé složky zrychlení s osami x, y a z. Čas, pro který spočítejte jednotlivé složky je $t=0,5s$.

Toto vše proveďte, když je zadán následující vektor:

$$\vec{r}_{(t)} = \frac{2}{t} \cdot \vec{i} + 3t^3 \cdot \vec{j} + 4e^{2t} \cdot \vec{k} \qquad e = 2,718; \quad t = 0,5s$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\vec{v}_{(t)} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{2}{t^2} \cdot \vec{i} + 9t^2 \cdot \vec{j} + 4e^{2t} \cdot \vec{k}$$

$$v_x = -\frac{2}{t^2} = -8m \cdot s^{-1}$$

$$\cos \alpha_v = \frac{v_x}{v} \Rightarrow \alpha_v = 125,78^\circ$$

$$v_y = 9t^2 = 2,25m \cdot s^{-1}$$

$$\cos \beta_v = \frac{v_y}{v} \Rightarrow \beta_v = 80,53^\circ$$

$$v_z = 4e^{2t} = 10,87m \cdot s^{-1}$$

$$\cos \gamma_v = \frac{v_z}{v} \Rightarrow \gamma_v = 37,4^\circ$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \underline{\underline{13,86m \cdot s^{-1}}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{4}{t^3} \cdot \vec{i} + 18t \cdot \vec{j} + 8e^{2t} \cdot \vec{k}$$

$$a_x = 32m \cdot s^{-2}$$

$$\cos \alpha_a = \frac{a_x}{a} \Rightarrow \alpha_a = 36,33^\circ$$

$$a_y = 9m \cdot s^{-2}$$

$$\cos \beta_a = \frac{a_y}{a} \Rightarrow \beta_a = 76,9^\circ$$

$$a_z = 21,74m \cdot s^{-1}$$

$$\cos \gamma_a = \frac{a_z}{a} \Rightarrow \gamma_a = 56,82^\circ$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \underline{\underline{39,72m \cdot s^{-1}}}$$

Příklad4.

Spočítejte výslednou hodnotu vektorů síly \vec{F}_v , úhly svírající s osami x, y a z jednotlivých složek síly, když jsou zadány níže uvedené síly. Také tyto síly zakreslete do souřadnicového systému.

$$\vec{F}_1 = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = 5\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = -3\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{F}_4 = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{F}_v = \sum \vec{F}_i = 8\vec{i} - 13\vec{j} + \vec{k}$$

$$F_v = \sqrt{8^2 + 13^2 + 1} = \underline{\underline{15,297 N}}$$

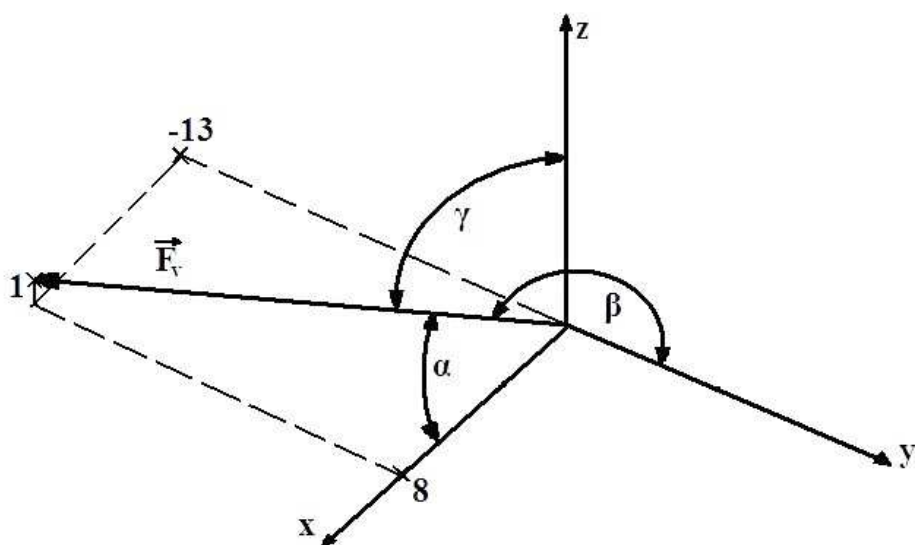
$$\cos \alpha_v = \frac{F_x}{F_v} = \frac{8}{15,3} \Rightarrow \alpha_v = \underline{\underline{58,468^\circ}}$$

$$\cos \beta_v = \frac{F_y}{F_v} = \frac{-13}{15,3} \Rightarrow \beta_v = \underline{\underline{148,2^\circ}}$$

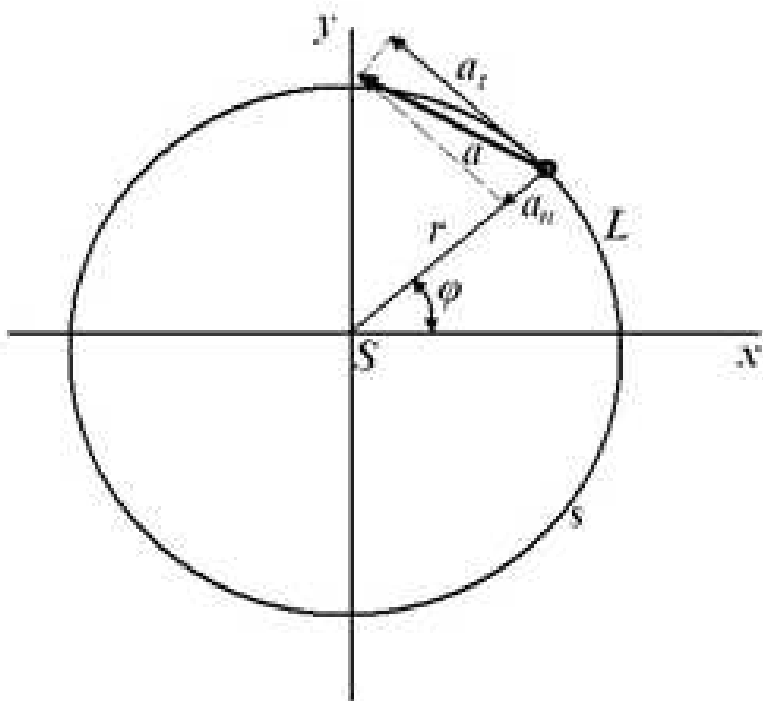
$$\cos \gamma_v = \frac{F_z}{F_v} = \frac{1}{15,3} \Rightarrow \gamma_v = \underline{\underline{86,3^\circ}}$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky





Stejně jako jsou počítány jednotlivé hodnoty polohy, rychlosti a zrychlení, tak se stejným způsobem počítají i složky zrychlení. Stejně jako jsou počítány jednotlivé hodnoty polohy, rychlosti a zrychlení, tak se stejným způsobem počítají i složky zrychlení.



Kde je: r – poloměr, φ – středový úhel

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- Úhlová rychlost

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

- Velikost rychlosti

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cdot \varphi) = r \cdot \omega$$

- Úhlové zrychlení

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

- Uražená dráha

$$s = r \cdot \varphi$$

- Normálové zrychlení

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r \cdot \omega^2$$

- Tečné zrychlení

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \cdot \varepsilon$$

- Celkové zrychlení

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Příklad 5.

Vektor úhlové rychlosti rotujícího tělesa je:

$$\vec{\omega} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

Bod L senachází v poloze:

$$\vec{r} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$$

Určete vektor rychlosti bodu L.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} = \underline{15\vec{i} - 8\vec{j} + 6\vec{k}} \Rightarrow$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{15^2 + 8^2 + 6^2} = \sqrt{225 + 64 + 36} = \underline{18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad6.

Jaký je nejvyšší, když $a_n = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a $v = 130 \text{ km/h}$

$$v = 130 \text{ km/h} = 36,1 \text{ m/s}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r \cdot \omega^2$$

$$r = \frac{v^2}{a_n} = \frac{36,1^2}{5} = \underline{261 \text{ m}}$$

Příklad7.

Bod se pohybuje po kružnici o poloměru $r = 2 \text{ m}$. Středový úhel φ se mění dle vztahu $\varphi = 0,1t^3$.
Jaká je velikost zrychlení v čase $t = 3 \text{ s}$?

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot (0,1t^3) = 0,3t^2$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot (0,3t^2) = 0,6t$$

$$a_{t_3} = r \cdot \varepsilon = 2 \cdot 0,6t = 2 \cdot 0,6 \cdot 3 = 3,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_{n_3} = r \cdot \omega^2 = 2 \cdot (0,3 \cdot 3^2)^2 = 14,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{3,6^2 + 14,6^2} = \underline{15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ