

Normální (Gaussovo) rozdělení

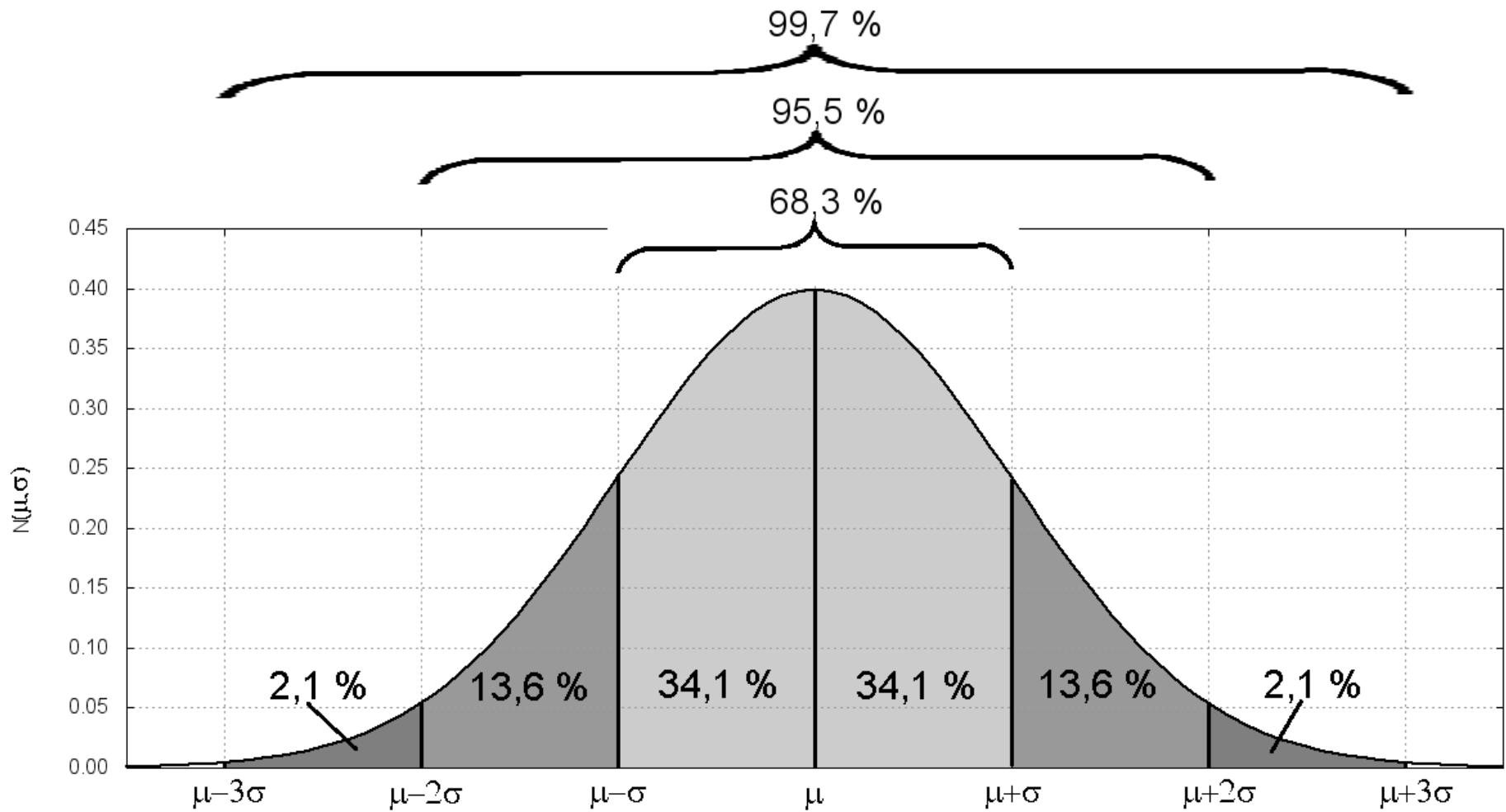
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$f(x)$ je funkce hustoty pravděpodobnosti, symetrická vůči poloze maxima $x = \mu$

- μ ... **střední hodnota**
- σ ... **směrodatná odchylka** (tzv. pološířka křivky mezi inflexními body)

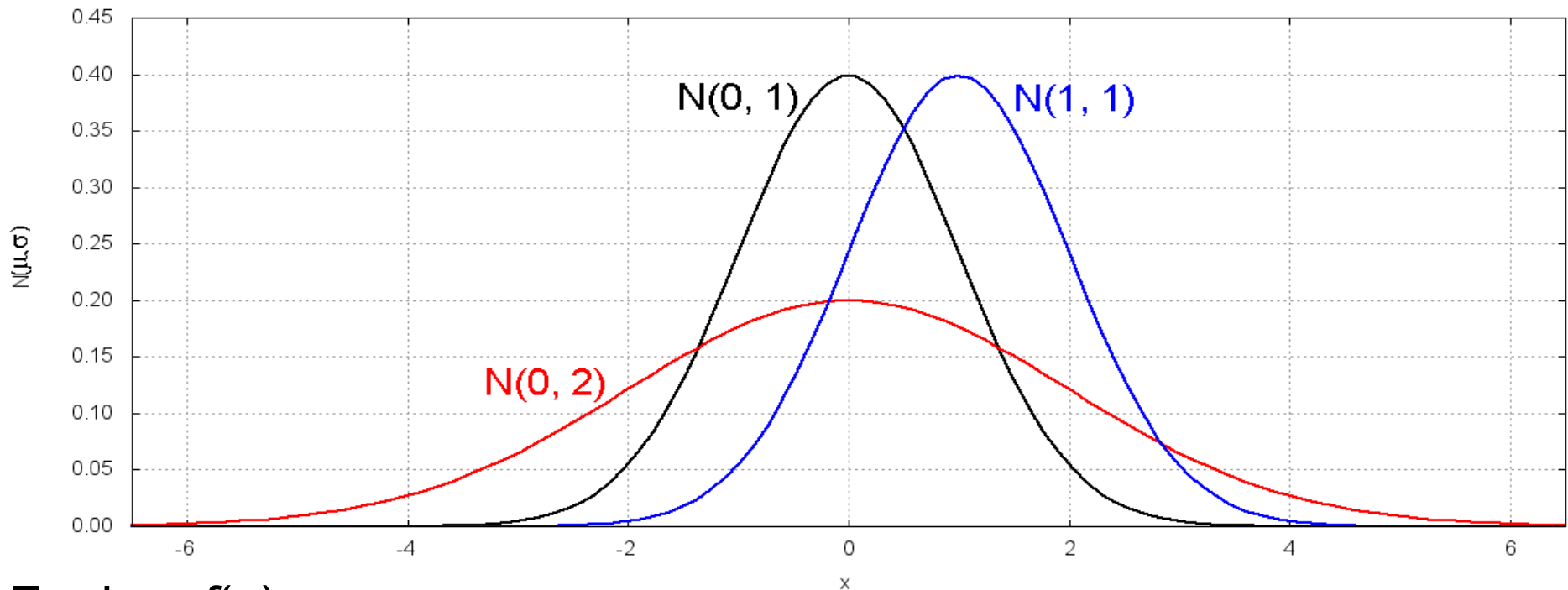
(Meloun & Militký, 2013)

Normální (Gaussovo) rozdělení



(Meloun & Militký, 2013)

Normální (Gaussovo) rozdělení



Funkce $f(x)$

- symetrická vůči poloze maxima $x = \mu$, které je současně střední hodnotou náhodné proměnné,
- s rostoucí směrodatnou odchylkou σ se křivka rozšiřuje a klesá její funkční hodnota v maximu, protože plocha pod křivkou musí zůstat jednotková \rightarrow roste rozptyl hodnot.

(Meloun & Militký, 2013)

Normální (Gaussovo) rozdělení - výpočet

Hodnoty hustoty pravděpodobnosti i distribuční funkce lze spočítat pomocí funkce

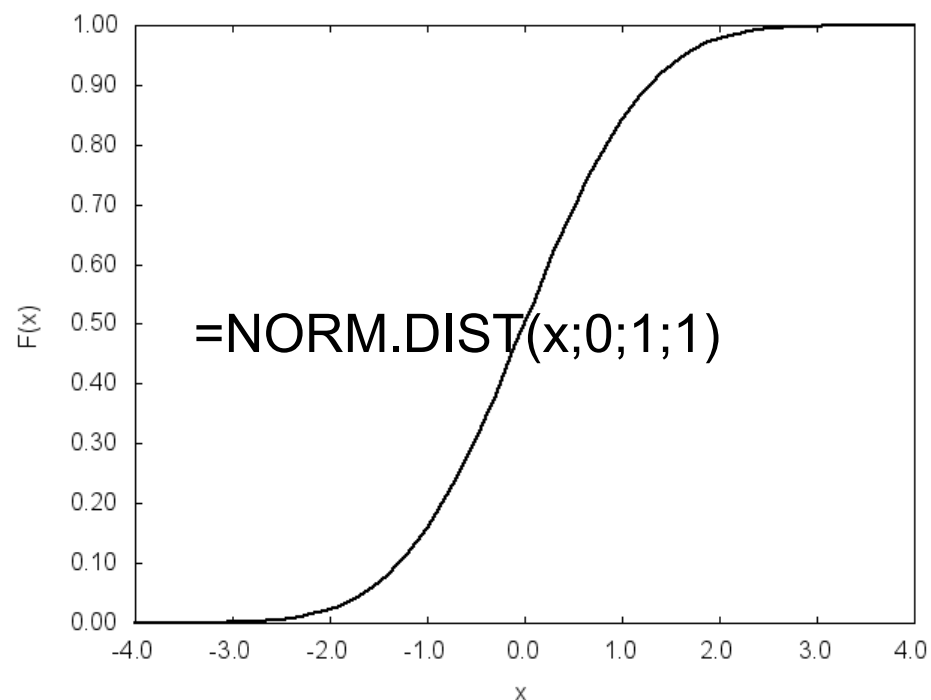
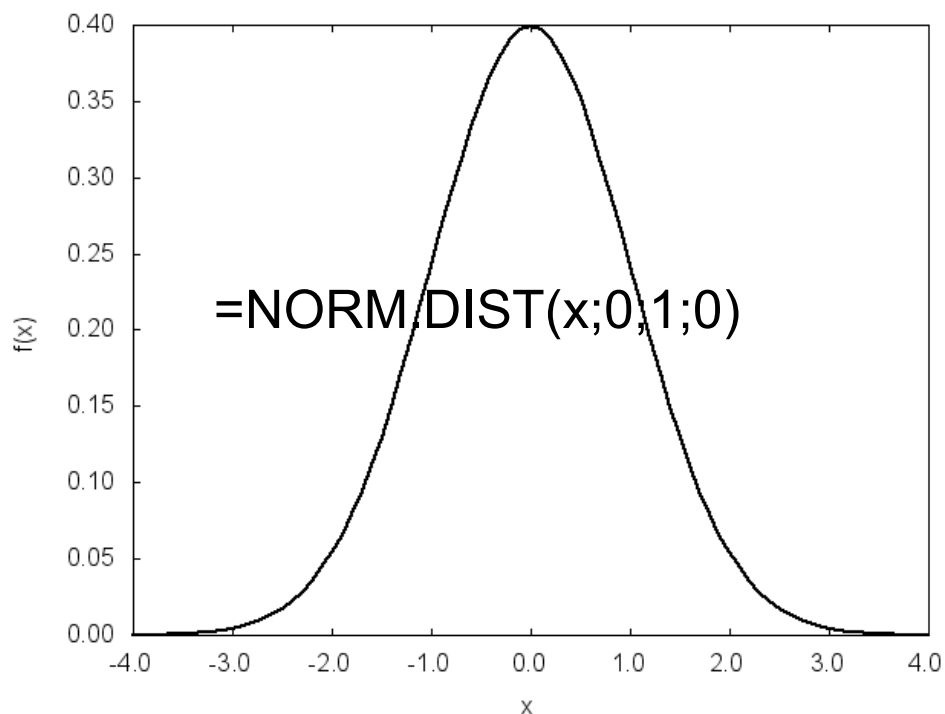
=NORM.DIST(x;střed_hod;sm_odch;S)

x - hodnota, pro kterou zjišťujeme hodnotu rozdělení.

střed_hod - střední hodnota.

sm_odch - směrodatná odchylka rozdělení.

S - je-li NEPRAVDA, vrací hustotu pravd., je-li PRAVDA, vrací distribuční funkci.



Normální (Gaussovo) rozdělení - výpočet

Příklad:

Výšky studentek FT mají normální rozdělení se **střední hodnotou 168 cm** a **směrodatnou odchylkou 6 cm**.

Odhadněte, kolik studentek FT má výšku mezi 158 a 166 cm.

Řešení:

=NORM.DIST(158;168;6;1) vrací 0.047

=NORM.DIST(166;168;6;1) vrací 0.369

Odhad parametrů na základě náhodného výběru

Výsledkem měření veličiny není hustota pravděpodobnosti získaná z nekonečného počtu měření, ale **konečný soubor naměřených hodnot** – tzv. **výběr** z nekonečného počtu všech možných hodnot.

- hledané parametry nikdy neurčíme neomezeně přesně
- znalost chování náhodných proměnných umožňují říci, s jakou pravděpodobností se v oblasti, kterou jsme vymezili naším odhadem, skutečná hodnota nachází

(Meloun & Militký, 2013)

Protože jsou konkrétní naměřené hodnoty zpravidla ovlivňovány **velkým množstvím různých nezávislých vlivů**, odpovídá rozdělení měřených veličin nejčastěji **normálnímu rozdělení**.

Odhad parametrů náhodného výběru - značení

Mějme soubor N naměřených hodnot

$$x_1, x_2, \dots, x_N$$

náhodné veličiny s **normálním rozdělením** s parametry μ a σ .

Z naměřených hodnot chceme **odhadnout** jeho hodnoty parametrů μ a σ .

Hodnoty odhadů budeme značit $\hat{\mu}$ a $\hat{\sigma}$, abychom je odlišili od neznámých skutečných hodnot.

Aritmetický průměr

Lze dokázat, že nejlepším **odhadem** střední hodnoty normálního rozdělení, a tedy i skutečné hodnoty měřené veličiny, je **aritmetický průměr** měřených hodnot

(Neubauer et al., 2012)

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Vztah plyne z podmínky, aby součet chyb byl nulový:

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu}) = 0$$

Směrodatná odchylka jednoho měření

Nejlepším odhadem **výběrové směrodatné odchylky jednoho měření** je

(Neubauer et al., 2012)

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu})^2}$$

Směrodatná odchylka aritmetického průměru

$$\hat{\sigma}_{\hat{\mu}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu})^2}$$

Chceme vědět, jak dobrý je odhad $\hat{\mu}$, tedy s jakou pravděpodobností p leží skutečná střední hodnota μ v intervalu

(Neubauer et al., 2012)

$$\langle \hat{\mu} - k \hat{\sigma}_{\hat{\mu}}, \hat{\mu} + k \hat{\sigma}_{\hat{\mu}} \rangle$$

Studentovy koeficienty

S jakou pravděpodobností p leží skutečná střední hodnota μ v intervalu

$$\langle \hat{\mu} - k \hat{\sigma}_{\hat{\mu}}, \hat{\mu} + k \hat{\sigma}_{\hat{\mu}} \rangle$$

Tabulka Studentových koeficientů k

	hladina spolehlivosti $1-\alpha$			
N	50,00 %	68,27 %	95,45 %	99,73%
3	0,817	1,321	4,526	19,210
4	0,765	1,197	3,307	9,219
5	0,741	1,141	2,869	6,620
10	0,703	1,059	2,320	4,094
20	0,688	1,027	2,141	3,447
100	0,677	1,005	2,025	3,077
∞	0,675	1,000	2,000	3,000

Studentovy koeficienty lze také spočítat pomocí funkce $=T.INV.2T(\alpha;N-1)$.

Odlehlé hodnoty

Ve zpracovávaných datech se mohou objevit **odlehlé hodnoty**, tedy hodnoty nepatřící mezi ostatní.

Takové hodnoty mohou být důsledkem

- hrubých chyb při měření,
- chyb při přepisování dat,
- prvku, který do sledovaného základního souboru nepatří,
- ...

Takové odlehlé hodnoty je třeba identifikovat a následně **vyloučit ze souboru**, protože by negativně ovlivnily výsledky statistického zpracování.

(Neubauer et al., 2012)

Testování statistických hypotéz – stručný úvod

1. **Formulujeme tzv. nulovou hypotézu**
(předpokládáme, že pozorovaný jev je pouze náhodný).
2. **Zvolíme hladinu významnosti testu α** , tj. riziko (že zamítneme hypotézu, která je ve skutečnosti správná), s nímž jsme ochotni se smířit.
3. **Spočítáme** příslušné **testovací kritérium** a porovnáme ho s příslušnou kritickou hodnotou.
4. **Nulovou hypotézu** buď **nezamítneme** (testovací kritérium je menší než kritická hodnota) nebo **zamítneme** (testovací kritérium je větší než kritická hodnota).

(Meloun & Militký, 2013)

Testování statistických hypotéz – chyby

Vždy existuje riziko, že naše tvrzení nebude v souladu se skutečností, tedy že buď

- zamítneme hypotézu, která ve skutečnosti platí – takovou chybu označme α (tzv. **chyba 1. druhu**),

nebo

- nezamítneme hypotézu, která ve skutečnosti neplatí – takovou chybu označme β (tzv. **chyba 2. druhu**).

Zmenšení α vede za jinak nezměněných podmínek ke zvětšení β a naopak.

Hodnotu α volíme nejčastěji **0,05; 0,01; 0,005; 0,001**.

Když hypotézu zamítneme, znamená to, že téměř jistě (s pravděpodobností $1 - \alpha$) neplatí.

(Meloun & Militký, 2013)

Testování statistických hypotéz

		Výsledek testu	
		platí H_0	neplatí H_0
Skutečnost	platí H_0	správné rozhodnutí pravděpodobnost $1 - \alpha$ spolehlivost testu	chyba I. druhu pravděpodobnost α hladina významnosti
	neplatí H_0	chyba II. druhu pravděpodobnost β hladina významnosti	správné rozhodnutí pravděpodobnost $1 - \beta$ síla testu

(Meloun & Militký, 2013)

Testování statistických hypotéz -příklad

Chceme testovat podle výšky, zda neznámá osoba je muž.

Předpokládejme, že

- **muži** mají $\mu=180$ cm, $\sigma=5$ cm;
- **ženy** mají $\mu=170$ cm, $\sigma=5$ cm.

Nulová hypotéza: Osoba je žena.

Jakou výšku musíme požadovat na hladině významnosti 0.05 (5 % riziko, že řekneme, že je to muž a bude to žena)?

Jakou výšku musíme požadovat na hladině významnosti 0.01?

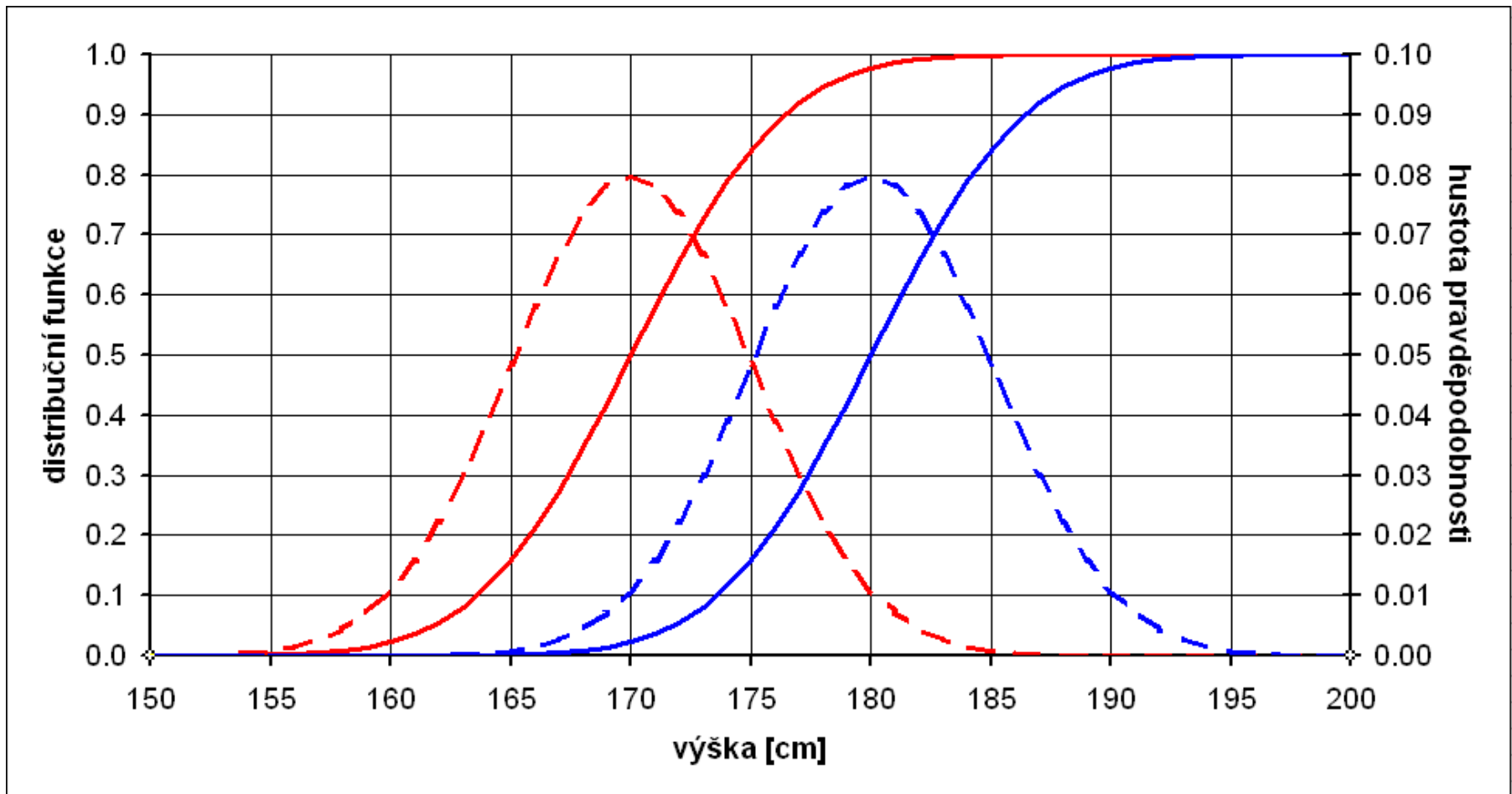
Jaká je pravděpodobnost chyby 2. druhu?

Jaká je síla testu?

Příklad

muži modře x ženy červeně

distribuční funkce plnou čarou x hustota pravděpodobnosti čárkovaně



Grubbsův test odlehlých hodnot

Jako míra odlehlosti hodnoty slouží její vzdálenost od aritmetického průměru výběru dat s **normálním rozdělením**, vztažená k výběrové směrodatné odchylce.

Testovací statistika má tvar
(Meloun & Militký, 2013)

$$T = \frac{|x_{ext} - \hat{\mu}|}{\sigma}$$

Je-li T větší než kritická hodnota $T_{N,\alpha}$, vyloučíme testovanou hodnotu ze souboru.

Poznámky:

1. Testujeme jednu hodnotu, která je nejvzdálenější od průměru X_{ext} .
2. V literatuře existují i varianty testující současně minimální i maximální hodnotu, případně používající nevýběrovou směrodatnou odchylku. Tyto varianty používají jiné kritické hodnoty.

Kritické hodnoty Grubbsova T-rozdělení ($\alpha = 0,05$ a $0,01$)

N	3	4	5	7	10	15	20	30	50	70	100	200
$T_{N,0,05}$	0,94	1,28	1,53	1,87	2,17	2,46	2,64	2,86	3,10	3,23	3,37	3,60
$T_{N,0,01}$	0,94	1,30	1,58	1,98	2,35	2,71	2,92	3,18	3,45	3,60	3,74	3,97

Test střední hodnoty normálního rozdělení

Na začátku předpokládáme, že střední hodnota souboru s normálním rozdělením, ze kterého byl proveden výběr, je μ_0 .

Testovací kritérium:

$$t = \frac{|\hat{\mu} - \mu_0|}{\hat{\sigma}_{\hat{\mu}}}$$

kde $\hat{\mu}$ a $\hat{\sigma}_{\hat{\mu}}$ jsou výběrová střední hodnota a její výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru.

Kritickou hodnotou $t_{1-\alpha}(N-1)$ jsou kvantily Studentova rozdělení s $N-1$ stupni volnosti pro zvolenou hladinu významnosti α , které najdeme ve statistických tabulkách nebo vypočítáme pomocí funkce $=T.INV.T2(\alpha, N-1)$.

(Lepš & Šmilauer, 2016)

Test střední hodnoty normálního rozdělení

Hodnoty:

5.34; 4.03; 5.94; 3.24; 5.21;

5.07; 4.31; 7.47; 6.81; 4.59.

$$\mu = 5,20$$

$$\sigma = 1,28$$

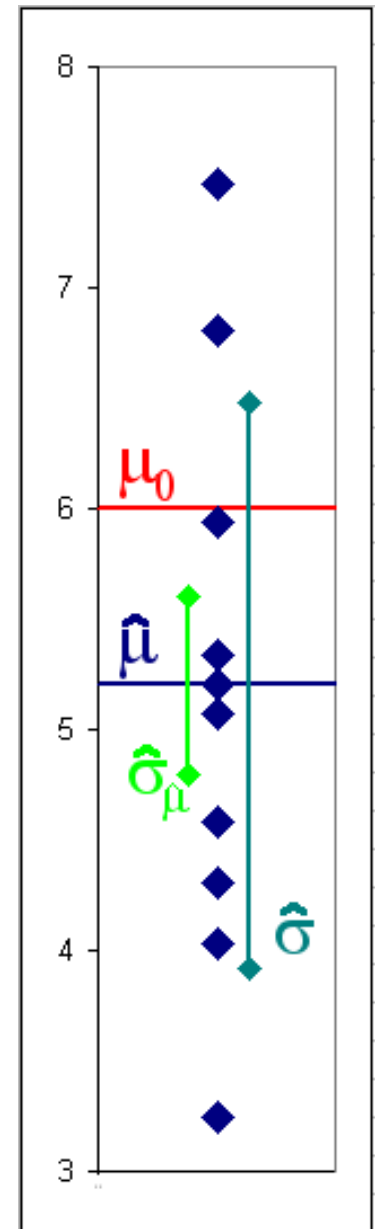
$$\sigma_{\mu} = 0,40$$

$$\mu_0 = 6,00$$

$$t = \frac{|\hat{\mu} - \mu_0|}{\hat{\sigma}_{\hat{\mu}}}$$

$$t = 2,00$$

$$t_{krit}(\alpha=0,05) = 2,26.$$



Test rovnosti dvou středních hodnot norm. rozd.

Na začátku předpokládáme, že střední hodnoty dvou souborů s normálním rozdělením, ze kterých byl proveden výběr, se rovnají.

Testovací kritérium:

$$t = \frac{|\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2|}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{N_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{N_2}}}$$

kde $\hat{\mu}_1$ a $\hat{\sigma}_1$ resp. $\hat{\mu}_2$ a $\hat{\sigma}_2$ jsou výběrová střední hodnota a výběrová směrodatná odchylka 1. souboru resp. 2. souboru.

Kritickou hodnotou $t_{1-\alpha}(N_1+N_2-2)$ jsou kvantily Studentova rozdělení s N_1+N_2-2 stupni volnosti pro zvolenou hladinu významnosti α , které najdeme ve statistických tabulkách nebo vypočítáme pomocí funkce =T.INV.2T(α , N_1+N_2-2).

(Lepš & Šmilauer, 2016)

Test rovnosti dvou středních hodnot norm. rozd.

Hodnoty:

1. sada: 7.42; 5.43; 5.88; 6.53; 7.71; 5.72; 5.77;
4.89; 5.65; 5.92.

2. sada: 4.79; 4.87; 5.60; 4.58; 6.59; 4.55; 3.71;
3.85; 3.46; 5.36.

$$\mu_1 = 6,09$$

$$\mu_2 = 4,74$$

$$\sigma_1 = 0,88$$

$$\sigma_2 = 0,95$$

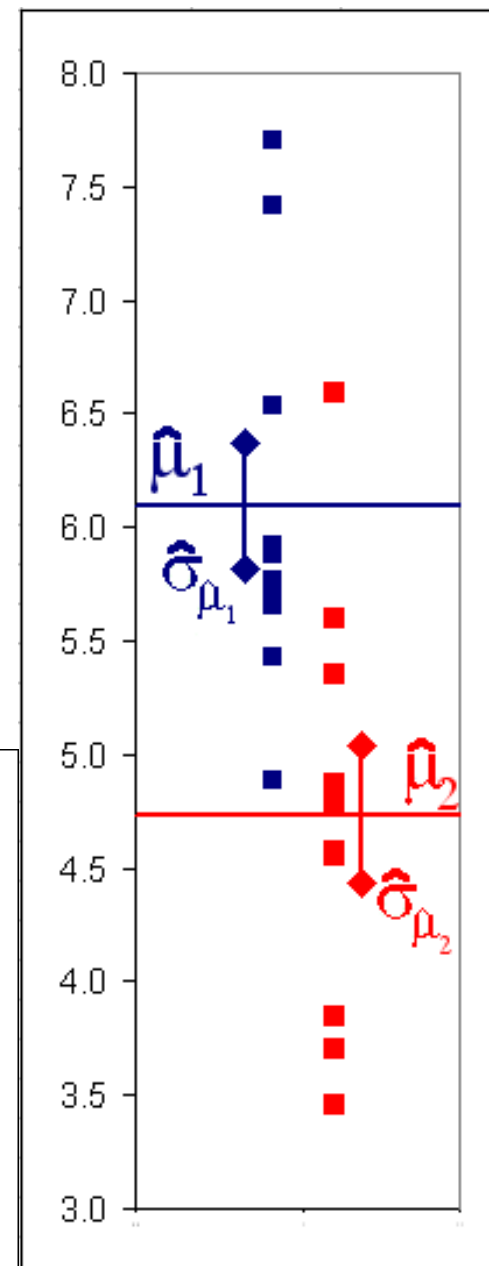
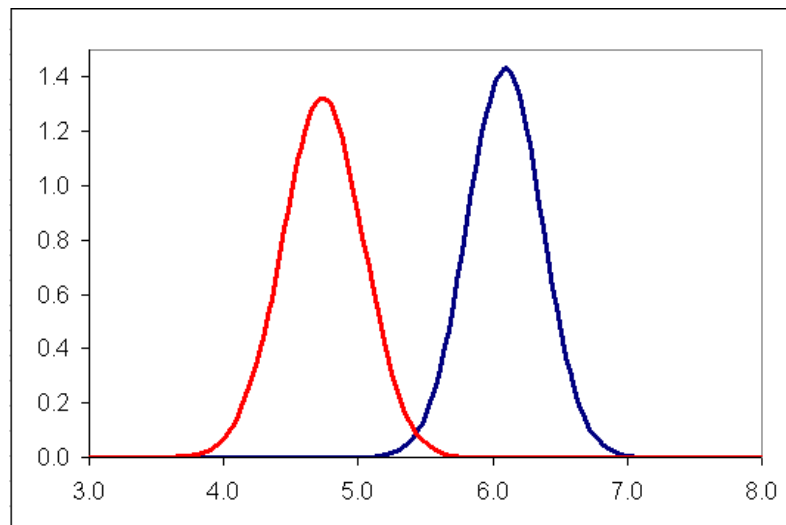
$$\sigma_{\mu_1} = 0,28$$

$$\sigma_{\mu_2} = 0,30$$

$$t = \frac{|\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2|}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{N_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{N_2}}}$$

$$t = 3,31$$

$$t_{krit}(\alpha=0,01) = 2,88.$$



Test rozdílu dvou středních hodnot - párový

Předpokládejme, že testujeme účinky preparátu na zlepšení paměti. Pokusné osoby nejdříve absolvovaly test paměti, poté dostaly preparát a absolvovaly test paměti ještě jednou.

Pro testování bychom mohli použít test rozdílu dvou středních hodnot z minulé kapitoly. Lze však očekávat, že výsledky testu budou mít velkou variabilitu, která může překrýt případné malé zlepšení.

Nabízí se proto možnost **spočítat pro každou osobu rozdíl obou testů paměti a testovat, zda je střední rozdíl mezi testy nulový nebo různý od nuly.**

(Lepš & Šmilauer, 2016)

Pravděpodobnostní přístup

Při testování hypotéz jsme počítali testovací kritérium a srovnávali ho s kritickou hodnotou na nějaké hladině významnosti.

Používá se i **opačný přístup - z testovacího kritéria spočítat pravděpodobnost s jakou platí nulová hypotéza.**

Příklad:

Předpokládejme, že při testu střední hodnoty (10 stupňů volnosti) jsme vypočítali testovací kritérium $T = 2,97$ a pomocí funkce $T.INV.2T()$ kritické hodnoty na hladinách významnosti 0,05 a 0,01 $t_{krit}(0,05) = 2,23$ a $t_{krit}(0,01) = 3,17$.

H_0 zamítáme na hladině 0,05 a nezamítáme na 0,01.

Alternativní přístup:

Pomocí funkce $T.DIST.2T(2,97;10)$ spočítáme pravděpodobnost $p = 0,014$, že nulová hypotéza platí.

(Lepš & Šmilauer, 2016)

Postup při zpracování dat

1. Z naměřených hodnot vypočteme odhad střední hodnoty a odhad směrodatné odchylky jednoho měření.
2. Ze souboru naměřených hodnot vyloučíme odlehlé hodnoty.
3. Předchozí dva kroky opakujeme tak dlouho, až v souboru měření nejsou odlehlé hodnoty.
4. Pro naměřené hodnoty N , které zůstaly, vypočteme směrodatnou odchylku aritmetického průměru a určíme hodnotu Studentova koeficientu k pro požadovanou hladinu spolehlivosti. Chyba měření na dané hladině spolehlivosti je rovna součinu $k \hat{\sigma}_{\hat{\mu}}$.
5. Celkovou chybu měření zapíšeme na jedno nebo dvě platná místa a střední hodnotu na stejný počet desetinných míst jako chybu.
6. U výsledku uvedeme odpovídající jednotku.

Příklad

Ve vepříně bylo náhodně vybráno 8 prasátek o hmotnostech:
94,4; 90,3; 96,8; 89,4; 82,1; 98,1; 91,5 a 96,0 kg.

Určete průměrnou hmotnost prasátka z tohoto chovu.

aritmetický průměr: 92,3 kg

výběrová směrodatná odchylka: 5,20 kg

směrodatná odchylka: 4.86 kg

Vyloučení odlehlých hodnot:

Grubbsův test pro nejmenší: $T = (92,3 - 82,1)/4,86 = 2,10$

Grubbsův test pro největší: $T = (98,1 - 92,3)/4,86 = 1,20$

Kritická hodnota $T_{\text{krit}} = 2,17$ - nevyločíme žádnou.

Příklad - pokračování

aritmetický průměr: 92,3 kg

výběrová směrodatná odchylka: 5,18

směrodatná odchylka: 4,85

směrodatná odchylka průměru: $\hat{\sigma}_{\hat{\mu}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{(N)}} = \frac{5,20}{\sqrt{8}} = 1,84$

Studentův koeficient pro 7 stupňů volnosti a hladinu spolehlivosti 68,27 %: 1,077

Šířka intervalu na hladině spolehlivosti: $1,84 * 1,077 = 1,98$

Průměrná hmotnost prasátka z tohoto chovu je

$$m = (92,3 \pm 2,0) \text{ kg}$$