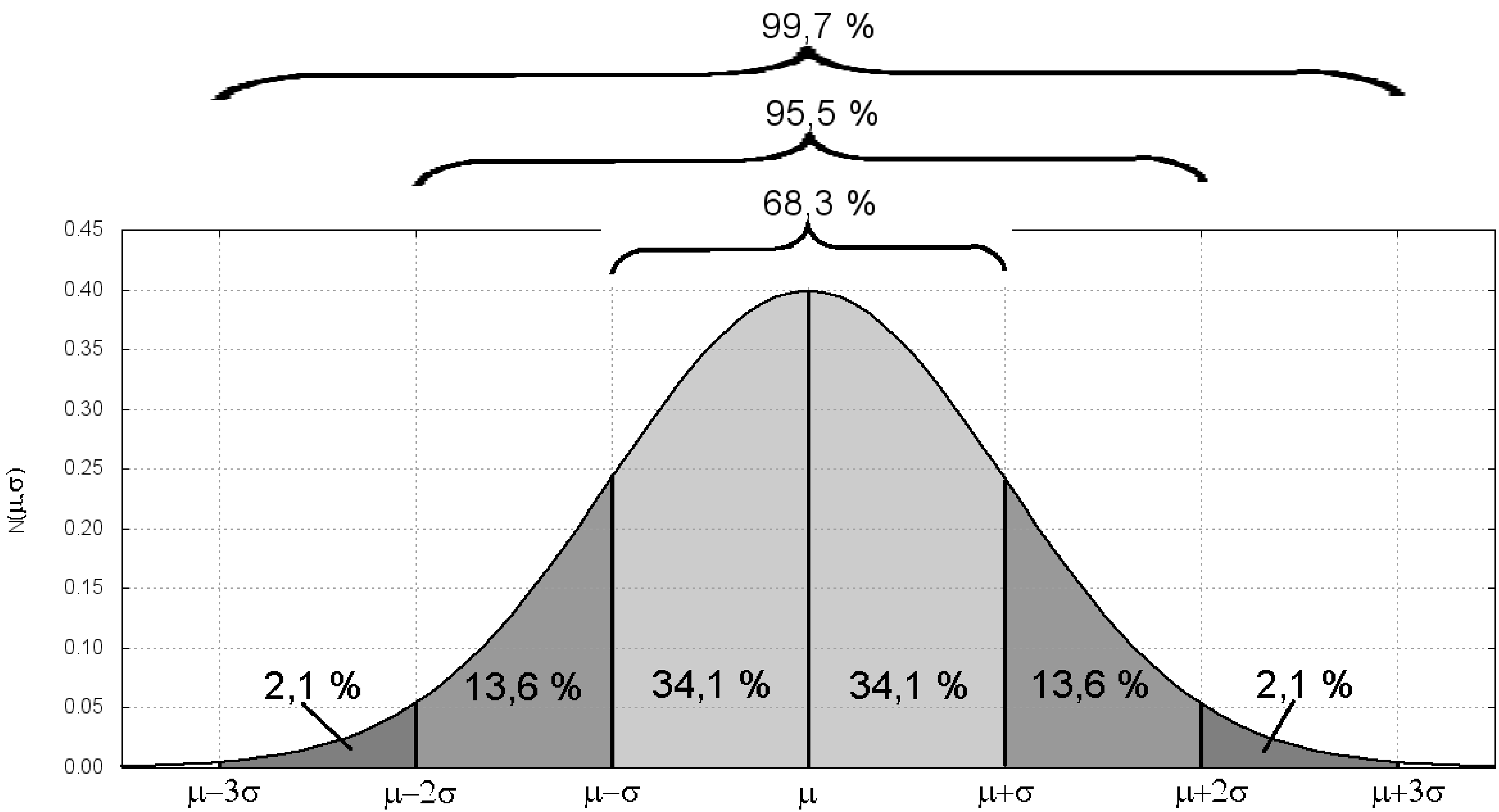
Normální (Gaussovo) rozdělení



(Wikipedie, 2017)

Normální rozdělení (2017, December 23). Retrieved from https://cs.wikipedia.org/wiki/Norm%C3%A1ln%C3%AD_rozd%C4%9Blen%C3%AD.

Přímo měřená veličina

- nejlepším odhadem **střední hodnoty normálního rozdělení** je **aritmetický průměr** měřených hodnot

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

- nejlepším odhadem **výběrové směrodatné odchylky jednoho měření** je

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \hat{\mu})^2}$$

- nejlepším odhadem **výběrové směrodatné odchylky aritmetického průměru** je

$$\widehat{\sigma_{\hat{\mu}}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \hat{\mu})^2}$$

(Neubauer et al., 2012)

Neubauer, J., Sedlačík, M., Kříž, O. (2012). *Základy statistiky Aplikace v technických a ekonomických oborech*. Praha: GRADA.

Zpracování přímo měřené veličiny

1. Z naměřených hodnot vypočteme **odhad střední hodnoty** a **odhad směrodatné odchylky jednoho měření**.
2. Ze souboru naměřených hodnot vyloučíme **odlehlé hodnoty**.
3. Předchozí dva kroky opakujeme tak dlouho, až v souboru měření nejsou odlehlé hodnoty.
4. Pro *N* naměřených hodnot, které zůstaly, vypočteme **odhad směrodatné odchylky aritmetického průměru** a určíme hodnotu Studentova koeficientu *k* pro požadovanou hladinu spolehlivosti. Chyba měření je rovna součinu $k\,\widehat{\sigma}_{\hat{\mu}}$.
5. Celkovou chybu měření zapíšeme na jedno nebo dvě platná místa a střední hodnotu na stejný počet desetinných míst jako chybu. U výsledku uvedeme odpovídající jednotku.

(Neubauer et al., 2012)

Neubauer, J., Sedlačík, M., Kříž, O. (2012). *Základy statistiky Aplikace v technických a ekonomických oborech*. Praha: GRADA.

Nepřímo měřená veličina

V praxi se často setkáváme s případy, kdy hodnotu veličiny, kterou přímo měřit neumíme nebo nechceme, určujeme z definičního vztahu nebo z fyzikálního zákona.

(Meloun & Militký, 2013)

Příklad:

- **hustotu** měříme jako poměr hmotnosti a objemu tělesa

  nebo

- **výkon elektrického proudu** jako součin napětí a proudu

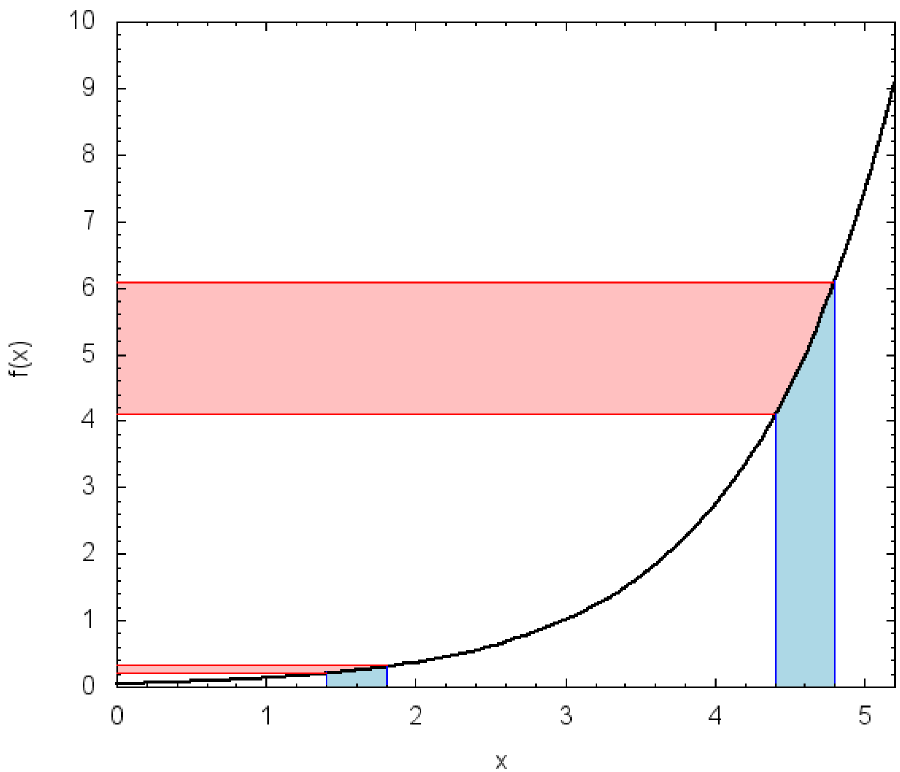
Meloun, M., Militký, J. (2013). *Kompendium statistického zpracování dat*. Praha: Karolinum.

Nepřímo měřená veličina závislá na 1 proměnné

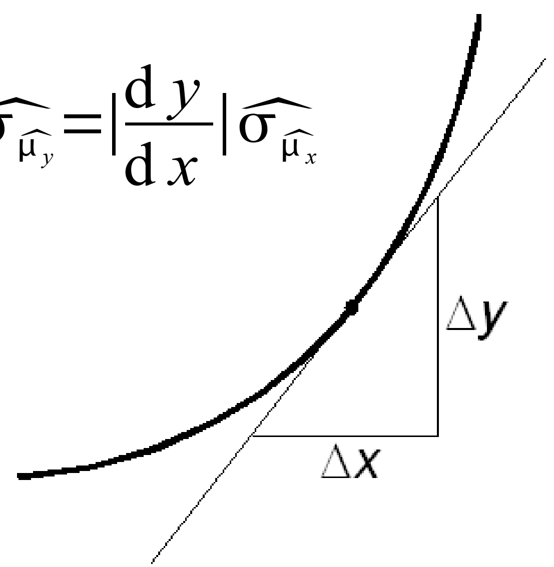
Mějme přímo měřenou veličinu ***x*** a z ní přímo vypočtenou veličinu ***y* = *f*(*x*)**.

- je-li odhadem střední hodnoty veličiny ***x*** $\widehat{\mu_x}$, pak odhadem střední hodnoty veličiny ***y*** je $\widehat{\mu_y} = f(\widehat{\mu_x})$.
- veličina ***x*** je měřena s přesností $\widehat{\sigma_{\widehat{\mu_x}}}$. Chceme určit přesnost veličiny ***y***, která je $\widehat{\sigma_{\widehat{\mu_y}}}$.

(Meloun & Militký, 2013)



$$\widehat{\sigma_{\widehat{\mu_y}}} = \left|\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right| \widehat{\sigma_{\widehat{\mu_x}}}$$



Meloun, M., Militký, J. (2013). *Kompendium statistického zpracování dat*. Praha: Karolinum.

Nepřímo měřená veličina závislá na 1 proměnné

Pro poloměr kruhové desky byla změřena hodnota ***r* = (3,2 ± 0,2) dm**. Vypočítejte plochy desky.

$$S = \pi r^2 = 3{,}14 . 3{,}2^2 = 32{,}17 \text{ dm}^2$$

$$\frac{\mathrm{d}\,S}{\mathrm{d}\,r} = 2\,\pi\,r = 2.3{,}14\,.3{,}2 = 20{,}1$$

$$\widehat{\sigma_{\widehat{\mu_S}}} = \left|\frac{\mathrm{d}\,S}{\mathrm{d}\,r}\right| \widehat{\sigma_{\widehat{\mu_r}}} = 20{,}1\,.0{,}2 = 4{,}0$$

$$\boldsymbol{S = (32 \pm 4)\ \mathrm{dm}^2}$$

Více proměnných - odhad střední hodnoty

Mějme nyní nepřímo měřenou veličinu

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Odhad střední hodnoty veličiny *y* získáme dosazením odhadů středních hodnot do výchozího vztahu (Meloun & Militký, 2013)

$$\widehat{\mu_y} = f(\widehat{\mu_1}, \widehat{\mu_2}, \ldots, \widehat{\mu_n})$$

Meloun, M., Militký, J. (2013). *Kompendium statistického zpracování dat*. Praha: Karolinum.

Více proměnných- odhad směrodatné odchylky

Lineární zákon přenosu chyb (nepoužívá se):

$$(\widehat{\sigma_{\hat{\mu}}})_{max} = \left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|\widehat{\sigma_{\hat{\mu}_1}} + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|\widehat{\sigma_{\hat{\mu}_2}} + \left|\frac{\partial y}{\partial x_3}\right|\widehat{\sigma_{\hat{\mu}_3}} + \ldots$$

Kvadratický (Gaussův) zákon přenosu chyb: (Meloun & Militký, 2013)

$$\widehat{\sigma_{\hat{\mu}}} = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \widehat{\sigma_{\hat{\mu}_1}}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \widehat{\sigma_{\hat{\mu}_2}}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_3}\right)^2 \widehat{\sigma_{\hat{\mu}_3}}^2 + \ldots}$$

Meloun, M., Militký, J. (2013). *Kompendium statistického zpracování dat*. Praha: Karolinum.

Více proměnných - příklad

Zjistěte hustotu měděného válce ρ, jestliže byla změřena jeho výška h, průměr d a hmotnost m:

$$h = (8{,}35 \pm 0{,}06)\ \mathrm{cm}$$

$$d = (2{,}82 \pm 0{,}01)\ \mathrm{cm}$$

$$m = (466{,}165 \pm 0{,}001)\ \mathrm{g}$$

Více proměnných - příklad

$$\hat{\rho} = \frac{4\,\hat{m}}{\pi\,\hat{d}^2\,\hat{h}} = 8{,}93850\ \mathrm{g.cm}^{-3}$$

$$\widehat{\sigma_\rho} = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\right)^2 \widehat{\sigma_m}^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial d}\right)^2 \widehat{\sigma_d}^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial h}\right)^2 \widehat{\sigma_h}^2}$$

$$\widehat{\sigma_\rho} = \sqrt{\left(\frac{4}{\pi\,d^2\,h}\right)^2 \widehat{\sigma_m}^2 + \left(\frac{-8\,m}{\pi\,d^3\,h}\right)^2 \widehat{\sigma_d}^2 + \left(\frac{-4\,m}{\pi\,d^2\,h^2}\right)^2 \widehat{\sigma_h}^2}$$

$$\widehat{\sigma_\rho} = \sqrt{0{,}0192^2 . 0{,}001^2 + 6{,}34^2 . 0{,}01^2 + 1{,}07^2 . 0{,}06^2} = 0{,}0902$$

ρ = (8,94 ± 0,09) g.cm^{-3}

Konkrétní typy závislostí

Pro závislosti typu

$$y = a\,x_1 + b\,x_2$$

má kvadratický zákon přenosu chyb jednoduchý tvar:

$$\widehat{\sigma_{\hat{y}}} = \sqrt{a^2\,\widehat{\sigma_{\hat{x}_1}}^2 + b^2\,\widehat{\sigma_{\hat{x}_2}}^2}$$

Konkrétní typy závislostí

Pro závislosti typu $$y = a\,\frac{\left(x_1 x_2^3\right)}{\left(x_3\right)}$$

je kvadratický zákon přenosu chyb snáze použitelný při přepisu pomocí **relativních chyb**:

$$\widehat{\delta_{\hat{y}}} = \sqrt{\widehat{\delta_{\hat{x}_1}}^2 + 3^2\widehat{\delta_{\hat{x}_2}}^2 + \widehat{\delta_{\hat{x}_3}}^2}$$

Pro $$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h}$$

$$\widehat{\delta_{\hat{\rho}}} = \sqrt{\widehat{\delta_{\hat{m}}}^2 + 2^2\widehat{\delta_{\hat{d}}}^2 + \widehat{\delta_{\hat{h}}}^2}$$

$$\widehat{\delta_{\hat{\rho}}} = \sqrt{\left(\frac{\widehat{\sigma_{\hat{m}}}}{\hat{m}}\right)^2 + 4\left(\frac{\widehat{\sigma_{\hat{d}}}}{\hat{d}}\right)^2 + \left(\frac{\widehat{\sigma_{\hat{h}}}}{\hat{h}}\right)^2}$$

Zpět k příkladu

Zjistěte hustotu měděného válce ρ, jestliže byla změřena jeho výška *h*, průměr *d* a hmotnost *m*:

$h = (8{,}35 \pm 0{,}06)$ cm

$d = (2{,}82 \pm 0{,}01)$ cm

$m = (466{,}165 \pm 0{,}001)$ g

$$\widehat{\delta_{\hat{\rho}}} = \sqrt{\left(\frac{\widehat{\sigma_{\hat{m}}}}{\hat{m}}\right)^2 + 4\left(\frac{\widehat{\sigma_{\hat{d}}}}{\hat{d}}\right)^2 + \left(\frac{\widehat{\sigma_{\hat{h}}}}{\hat{h}}\right)^2}$$

$$\widehat{\delta_{\hat{\rho}}} = \sqrt{\left(\frac{0{,}001}{466{,}165}\right)^2 + 4\left(\frac{0{,}01}{2{,}82}\right)^2 + \left(\frac{0{,}06}{8{,}35}\right)^2}$$

$$\widehat{\sigma_{\hat{\rho}}} = \widehat{\delta_{\hat{\rho}}} \,.\, \hat{\rho} = 0{,}0902$$

$\rho = (8{,}94 \pm 0{,}09)$ g.cm^{-3}

Zpět - veličina závislá na 1 proměnné - příklad

Pro poloměr kruhové desky byla změřena hodnota ***r* = (3,2 ± 0,2) dm**. Vypočítejte plochy desky.

$$S = \pi r^2 = 3{,}14 . 3{,}2^2 = 32{,}17 \text{ dm}^2$$

DŘÍVE

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 2\pi r = 2.3{,}14.3{,}2 = 20{,}1$$

$$\widehat{\sigma_{\widehat{\mu}_S}} = \left|\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\right| \widehat{\sigma_{\widehat{\mu}_r}} = 20{,}1 . 0{,}2 = 4{,}0$$

NYNÍ

$$\widehat{\delta_{\hat{S}}} = 2\,\widehat{\delta_{\hat{r}}}$$

$$\frac{\widehat{\sigma_{\hat{S}}}}{\hat{S}} = 2\,\frac{\widehat{\sigma_{\hat{r}}}}{\hat{r}}$$

$$\widehat{\sigma_{\hat{S}}} = \frac{2S}{r}\widehat{\sigma_{\hat{r}}} = \frac{2\pi r^2}{r}\widehat{\sigma_{\hat{r}}} = 2\pi r\,\widehat{\sigma_{\hat{r}}}$$

S = (32 ± 4) dm^2