Řešené příklady – Kmity I, II

84. Uvažujeme harmonicky kmitající těleso. Doba mezi dvěma po sobě následujícími okamžiky, ve kterých je rychlost tělesa nulová, činí 0,25 s. Prostorová vzdálenost poloh tělesa v těchto dvou okamžicích je 36 cm. Vypočtěte

a) periodu, b) frekvenci, c) amplitudu pohybu

---

a) V zadání je řečeno, že doba mezi dvěma po sobě následujícími okamžiky, ve kterých je rychlost tělesa nulová, činí 0,25. Je to tedy doba jednoho kyvu. Víme, že dva kyvy jsou jeden kmit. Perioda je doba jednoho kmitu. Proto:

$$T = 2t = 2.0{,}25 = 0{,}5s$$

b) Frekvence je převrácená hodnota periody, tedy:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}5} = 2Hz$$

c) Amplituda pohybu je největší výchylka od rovnovážné polohy. Pokud je prostorová vzdálenost dvou míst, kde je rychlost tělesa nulová (tedy kladné výchylky od záporné výchylky) l = 36 cm, pak polovina této vzdálenosti je největší výchylka od rovnovážné polohy, tedy amplituda pohybu:

$$A = \frac{l}{2} = \frac{36}{2} = 18cm$$

468. Částice koná lineární harmonický pohyb kolem bodu x = 0 m. V čase t = 0 s má nulovou rychlost a její výchylka je 4 mm. Je-li frekvence 0,25 Hz, najděte
a) periodu, b) úhlovou frekvenci, c) amplitudu.
Dále zjistěte v čase t = 0,9 s
d) výchylku, e) rychlost, f) zrychlení, g) amplitudu rychlosti, h) amplitudu zrychlení.

---

a) Perioda je převrácená hodnota frekvence, tedy:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}25} = 4s$$

b) Úhlová frekvence je úhel, který urazí těleso za sekundu při pohybu po kružnici:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = 1{,}57rad.s^{-1}$$

c) Amplituda je největší výchylka od rovnovážné polohy. Pokud v čase t=0s je výchylka 4mm a v tomto okamžiku je rychlost tělesa nulová, pak se jedná o největší výchylku:

$$y_m = 4\ mm$$

d) Víme, že pro lineární harmonický pohyb platí: $y = y_m sin\omega t$. Vzhledem k tomu, že se těleso v čase 0s nachází v ose x = 0mm, a v ose y v maximální výchylce $y_m = 4\ mm$, bude platit rovnice:

$$y = y_m \cos \omega t$$

Tedy v čase t=0,9s bude okamžitá výchylka y:

$$y = 4 \sin(1{,}57.0{,}9) = 0{,}63mm$$

e) Rovnice rychlosti se dá získat derivací rovnice dráhy (výchylky) podle času:

$$v = \frac{dy}{dt} = -\omega y_m \sin \omega t$$

Rychlost v čase t=0,9s:

$$v = -1{,}57.4 \sin(1{,}57.0{,}9) = -6{,}2\ mm.s^{-1}$$

e) Zrychlení získáme derivací rovnice rychlosti podle času:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 y_m \cos \omega t$$

Rychlost v čase t=0,9s:

$$v = -1{,}57^2.4 \cos(1{,}57.0{,}9) = -1{,}55\ mm.s^{-2}$$

d) Amplituda rychlosti je analogická s amplitudou pohybu, tedy se nemění:

$$v_m = -\omega y_m = |-1{,}57.4| = 6{,}282\ mm.s^{-1}$$

e) Amplituda zrychlení je analogická s amplitudou rychlosti, tedy se také nemění:

$$a_m = -\omega^2 y_m = |-1{,}57^2.4| = 9{,}86\ mm.s^{-2}$$

475. Hmotný bod koná harmonický pohyb určen rovnicí $y = 5.\sin(6\pi.t)$ cm. V jakém čase je jeho kinetická energie třikrát větší než potenciální energie?

Ze zadání:

$$E_k = 3E_p$$

$$y = 5 \sin 6\pi t\ ;\ \omega = 6\pi$$

Z přednášek, víme že:

$$E_K = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 cos^2 \omega t$$

$$E_P = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 sin^2 \omega t$$

Pokud je kinetická energie třikrát větší než potenciální energie, pak:

$$3 = \frac{E_k}{E_p} = \frac{\frac{1}{2} m\omega^2 y^2 cos^2 \omega t}{\frac{1}{2} m\omega^2 y^2 sin^2 \omega t} = \frac{cos^2 \omega t}{sin^2 \omega t} = cotg^2 \omega t$$

Po dosazení ze zadání:

$$3 = cotg^2 6\pi t$$

$$cotg(6\pi t) = \sqrt{3}$$

$$cotg(6\pi t) = cotg\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$6\pi t = \frac{\pi}{6}$$

$$t = \frac{1}{36} = 0{,}0278s$$

86. Na píst, který harmonicky kmitá ve svislém směru, položíme závaží. a) Je-li perioda kmitů pístu 1,0 s, při jaké amplitudě začne závaží odskakovat od pístu?

b) Je-li amplituda kmitů pístu 5,0 cm, jaká může být největší frekvence, pro kterou zůstává závaží nepřetržitě v kontaktu s pístem?

a) Z přednášek víme, že:

$$a = y\omega^2, \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Závaží začne odskakovat od pístu, pokud zrychlení závaží překoná tíhové zrychlení, tedy:

$$a = g = 9{,}81ms^{-2}$$

$$g = y\omega^2 = y\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

Po vyjádření y:

$$y = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9{,}81.1^2}{4\pi^2} = 0{,}25m$$

b) Po vyjádření f:

$$f = \sqrt{\frac{g}{4\pi^2 y}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{4\pi^2 0{,}05}} = 2{,}23Hz$$

87. Těleso o hmotnosti *M*=1 kg je umístěno na vodorovné hladké podložce a spojeno s pružinou o tuhosti *k*=20 $N.m^{-1}$, která je na druhém konci upevněna ke stěně. Soustava je v rovnováze. V určitém okamžiku vnikne do tělesa rychlostí *v*=300 $m.s^{-1}$ projektil o hmotnosti *m*=10 g. Projektil zůstane zachycen v tělese. Situace je znázorněna na obr.

a) Určete rychlost tělesa bezprostředně po zásahu.

b) Vypočtěte amplitudu vzniklého harmonického pohybu

a) Ze zákona zachování hybnosti vyplývá, že součet hybností obou těles před a po srážce je stejná, tedy:

$$p_{1_p} + p_{2_p} = p_{1_k} + p_{2_k}$$

$$m_1 v_{1_p} + m_2 v_{2_p} = m_1 v_{1_k} + m_2 v_{2_k}$$

Těleso m_2 se před srážkou se nepohybuje a po srážce se obě tělesa budou pohybovat stejnou rychlostí, tedy:

$$m_1 v_{1_p} + 0 = (m_1 + m_2) v_k$$

$$v_k = \frac{m_1 v_{1_p}}{(m_1 + m_2)} = \frac{10.10^{-3}.300}{(10.10^{-3} + 1)} = 2{,}97 ms^{-1}$$

b)

474. Prázdný železniční vagón má hmotnost 20 t. Perioda vlastního kmitání prázdného železničního vagónu je 1,25 s. Nárazy na spoje kolejnic dostává vagón silové impulsy, které ho rozkmitají.

a) Při jaké rychlosti vlaku se vagón nejvíce rozkmitá, pokud délka kolejnic je 25 m?
b) Jaká bude perioda plně naloženého vagónu, je-li hmotnost nákladu 50 t?

a) Ze zadání: *T=1,25s*; *s=25m*

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1{,}25} = 5{,}024 rad.s^{-1}$$

$$s = O = 2\pi r$$

$$r = \frac{O}{2\pi} = \frac{25}{2\pi} = 3{,}98m$$

$$v = \omega_0 r = 5{,}024.3{,}98 = 19{,}996\, m.s^{-1}$$

b) Nejprve spočítáme tuhost pružiny při prázdném vagónu:

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m_1}, tedy\ k = \omega_1^2 m_1 = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 m_1 = \left(\frac{2\pi}{1,25}\right)^2 20000 = 50811 Nm^{-1}$$

Tuhost pružiny použijeme pro soustavu vagón + náklad:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{505811}{20000 + 50000}} = 2,69 rad.s^{-1}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}\ ; tedy T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{2,69} = 2,34s$$

88. Artista sedí na visuté hrazdě a houpá se tam a zpět s periodou 8,85 s. Pokud je hrazda v rovnovážné poloze a artista se na ní postaví, zvýší se těžiště soustavy o 35,0 cm. Považujte soustavu artista + visutá hrazda za matematické kyvadlo. Vypočtěte jeho periodu, jestliže artista při houpání na hrazdě stojí.

Artista, když sedí má periodu $T_1 = 8,85s$, když stojí $T_2 = 8,85s$, rozdíl délky závěsu $\Delta l = 0,35m$.

Z přednášek víme, že:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Proto spočítáme délku závěsu *L* při periodě když artista sedí, pak tuto délku zkrátíme o rozdíl délky závěsu a přepočítáme periodu, když artista stojí.

$$L_1 = \frac{T_1^2 g}{4\pi^2} = \frac{8,85^2 . 9,81}{4\pi^2} = 19,46m$$

$$L_2 = L_2 - 0,35 = 19,11m$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{19,11}{9,81}} = 8,77s$$

473. V kabině stojícího výtahu visí kyvadlo, jehož perioda je T_1 = 1s. Kabina se začne pohybovat vzhůru se stálým zrychlením a = 1,0 m.s^{-2}, Určitě periodu kyvadla v pohybujícím se výtahu.

Délka kyvadla pokud se výtah nepohybuje je:

$$L = \frac{T_1^2 g}{4\pi^2} = \frac{1^2 . 9,81}{4\pi^2} = 0,25m$$

Výtah se začne pohybovat se zrychlením *a,* délka kyvadla zůstává stejná, tedy:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}25}{9{,}81+1}} = 0{,}95s$$

470. V U-trubici je homogenní kapalina. Pomocí pístu umístěného v jednom rameni U-trubice posuneme kapalinové těleso o vzdálenost x_0. Celková délka kapalinového sloupce v trubici je L. Popište pohyb kapaliny po uvolnění pístu. Tlumení kmitů zanedbejte.

Celková hmotnost kapaliny:

$$m = \rho SL$$

Posunutí při síle působící na kapalinu označme $\boldsymbol{x_0}$. Sílu můžeme vyjádřit:

$$F = mg = \rho Vg = \rho S2x_0g$$

$$-\rho S2x_0g = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Po dosazení celkové hmotnosti a převedení rovnice na jednu stranu:

$$0 = \rho SL\frac{d^2x}{dt^2} + \rho S2x_0g$$

kde $\rho SL = m$ a $\rho S2g = k$

tedy $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\rho S2g}{\rho SL}} = \sqrt{\frac{2g}{L}}$

Pro lineární harmonický pohyb platí: $x = x_0 sin\omega t$.

tedy $x = x_0 sin\sqrt{\frac{2g}{L}}t$.

477. Tuhosti dvou různých pružin jsou k_1 = 120 N.m^{-1} a k_2 = 160 N.m^{-1}. Vypočítejte frekvenci kmitání tělesa o hmotnosti 1 kg zavěšeného na pružinách podle obrázku.

Z přednášky víme, že:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \;\; ; F = k.y \;\; ; f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

a) O co se natáhne první pružina, o to se stlačí druhá pružina, tedy výchylka první pružiny je stejná jako výchylka druhé pružiny $y_1 = y_2 = y$, ale výsledná síla bude součtem síly, která natahuje první pružinu a síly, která stlačuje druhou pružinu:

$$F = F_1 + F_2$$

$$ky = k_1 y + k_2 y$$

$$k = k_1 + k_2$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{120 + 160}{1}} = 2{,}7 Hz$$

b) V tomto případě natahuje těleso první pružinu o výchylku y_1 a zároveň druhou pružinu o výchylku y_2. Těleso působí stejnou tíhovou silou na obě pružiny $F = F_1 = F_2$, tedy:

$$y = y_1 + y_2$$

$$\frac{F}{k} = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \; neboli \; k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{120.160}{120 + 160}}{1}} = 1{,}3 Hz$$