

## 5. Lineární regrese

### Motivace:

Lineární regrese je metoda umožňující proložení bodů v grafu přímkou. Materiálové obory se hledají závislost vlastností materiálů na parametrech jeho přípravy (závislost permitivity nebo pevnosti kompozitu na obsahu plniva). Potravináři studují třeba závislost roztékavosti sýra na obsahu tavících solí nebo pH výrobku na obsahu kyseliny citronové. Procesní inženýry zajímá závislost viskozity při vstřikování na teplotě nebo složení materiálu. Pro měření byla zvolena tuhost pružiny, která je konstantou úměrnosti mezi silou působící na pružinu a jejím prodloužením. Bonusem je možnost změřit tuhost pružiny i z periody kmitů tělesa zavěšeného na pružině a srovnat tak velikost stejného parametru změřeného různými metodami.

### Požadované znalosti:

1. Vážení na laboratorních vahách, měření délkovými měřidly.
2. Střední hodnota, směrodatná odchylka souboru, směrodatná odchylka průměru, zákon šíření chyb, test rozdílu středních hodnot.
3. Sestrojení grafu závislosti dvou veličin.
4. Použití funkce LINREGRESE.
5. Interpretace výstupů funkce LINREGRESE.
6. Test rozdílu středních hodnot.

### Základní pojmy:

#### **Tuhost pružiny:**

Velikost síly  $F$  na pružině, je přímo úměrná protažení pružiny  $d$  a směřuje opačným směrem než je protažení:

$$\mathbf{F} = -k \cdot \Delta d \quad (1)$$

Znaménko minus ve vztahu (1) značí, že směr vektoru síly je opačný než směr vektoru deformace pružiny. Nás bude zajímat pouze závislost velikosti protažení pružiny na velikosti síly. Vztah (1) pak můžeme napsat:

$$F = k \cdot \Delta d = k \cdot (d - d_0) \quad (2)$$

Vztahy (1) a (2) jsou analogií k Hookeovu zákonu, kdy koeficientem úměrnosti mezi zatěžující silou a protažením pružiny je tuhost pružiny  $k$ .

Vztah mezi polohou  $d$  konce pružiny a hmotností  $m$  závaží zavěšeného na pružině na je

$$m \cdot g = k(d - d_0), \quad (3)$$

kde  $g$  je tíhové zrychlení ( $g_{Zlín} = 9,8130 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ) a  $d_0$  je poloha konce nezatížené pružiny.

Vyneseme-li do grafu závislost polohy konce pružiny na hmotností závaží, dostaneme přímkou popsanou rovnicí

$$d = \frac{g}{k} m + d_0 = ax + b. \quad (4)$$

Ze směrnice přímky  $a$  vypočítáme tuhost pružiny  $k$  a pomocí zákona šíření chyb i její chybu.

Zavěsíme-li na pružinu závaží, natáhneme pružinu a pustíme, začne závaží harmonicky kmitat s úhlovou frekvencí  $\omega$ . Velikost úhlová frekvence závisí na tuhosti pružiny  $k$  a hmotnosti závaží  $m$  podle vztahu:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5)$$

Mezi úhlovou frekvencí  $\omega$ , frekvencí  $f$  a periodou kmitání  $T$  platí vztah  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ . Vztah (5) lze proto upravit na:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (6)$$

Výsledný vztah pro **určení tuhosti pružiny  $k$  dynamickou metodou** je tedy:

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}. \quad (7)$$

### Statistická poznámka:

Při testování rovnosti dvou středních hodnot se používá testovací kritérium ve tvaru:

$$t = \frac{|\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2|}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{N_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{N_2}}}. \quad (8)$$

Toto testovací kritérium je určeno pro srovnání průměrů dvou souborů, u kterých dokážeme spočítat směrodatnou odchylku, která vystupuje ve jmenovateli. Vztah (8) je ale použitelný i v případě, kdy chceme srovnat dvě hodnoty, u kterých známe jen jejich chybu. Když si uvědomíme, že směrodatná odchylka průměru se počítá:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\mu}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}}, \quad (9)$$

můžeme vztah (8) přepsat:

$$t = \frac{|\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2|}{\sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{\mu}_1}^2 + \hat{\sigma}_{\hat{\mu}_2}^2}}. \quad (10)$$

### Použité přístroje a pomůcky:

1. Pružiny o různé tuhosti, laboratorní váhy, laboratorní závaží, délkové měřítko, stopky.
2. Technické listy jednotlivých přístrojů (k určení tříd přesnosti pro jednotlivé rozsahy).

### Úkoly měření:

#### Stanovte tuhost pružiny statickou metodou:

1. Pro několik hodnot zatížení pružiny závažím o hmotnosti  $m$  určete polohu konce pružiny  $x$  (využijte přiložený metr) a hmotnost závaží (zjistěte na digitální váze).
2. Vytvořte graf, do kterého vynesete hmotnost závaží na osu  $x$  a polohu konce pružiny na osu  $y$ . S využitím vztahu (4) proložte body pomocí lineární regrese přímkou a určete hodnotu tuhosti pružiny  $k$  a její chybu.

#### Stanovte tuhost pružiny dynamickou metodou:

3. K pružině zavěšené na stojanu připojte vhodné závaží se známou hmotností.
4. Rozkmitujte oscilátor neboli soustavu pružina-závaží a určete čas potřebný pro 50 kmitů oscilátoru  $t_{50}$ . Určete periodu kmitů  $T$ .
5. Měření 50 kmitů  $t_{50}$  proveďte opakovaně (5x).
6. Z výsledných period  $T$  určete jejich průměrnou hodnotu a chybu měření.
7. S využitím vzorce (7) určete tuhost pružiny  $k$  a její nejistotu.
8. Srovnajte (otestujte) tuhosti pružiny získané statickou a dynamickou metodou. Diskutujte získaná data a vyslovte závěry.

### Seznam doporučené literatury:

- [1] Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika, VUT v Brně, Nakladatelství VUTIUM, (2000).
- [2] Meloun M., Militký J.: Statistická analýza experimentálních dat, Academia, Nakladatelství Akademie věd České republiky (2004).