Normální (Gaussovo) rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

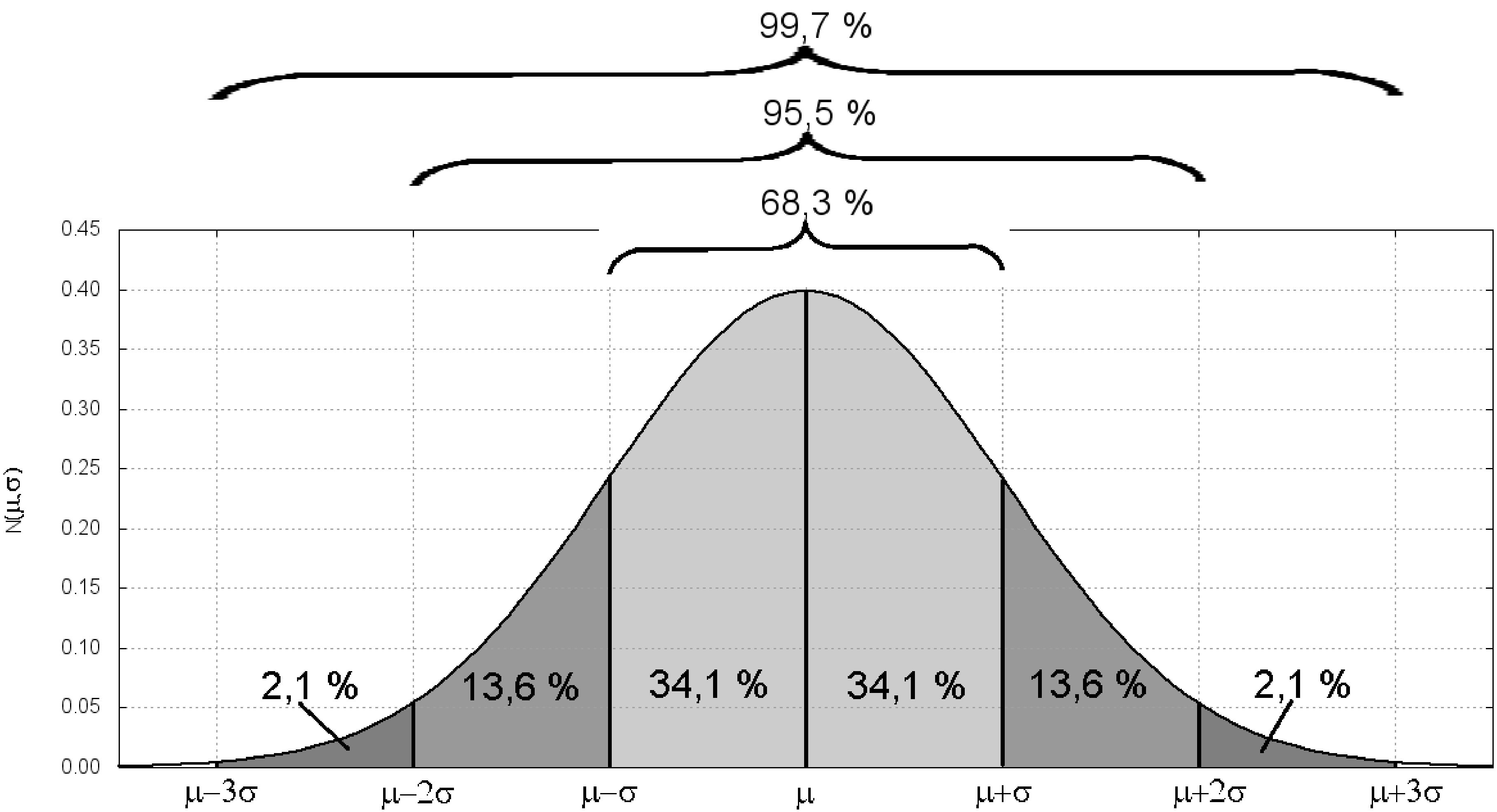
f(*x*) je funkce hustoty pravděpodobnosti, symetrická vůči poloze maxima $x = \mu$

- **μ** … **střední hodnota**
- **σ** … **směrodatná odchylka** (tzv. pološířka křivky mezi inflexními body)

(Meloun & Militký, 2013)

Meloun, M., Militký, J. (2013). *Kompendium statistického zpracování dat*. Praha: Karolinum.

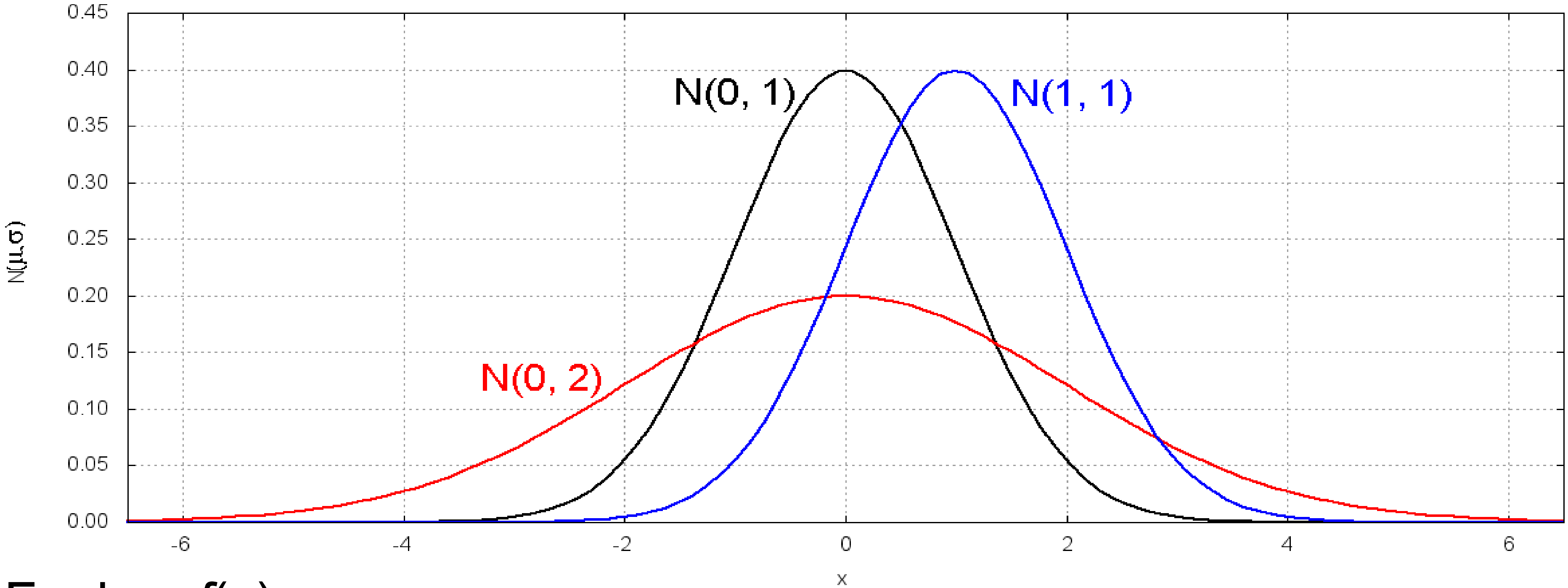
Normální (Gaussovo) rozdělení



(Meloun & Militký, 2013)

Meloun, M., Militký, J. (2013). *Kompendium statistického zpracování dat*. Praha: Karolinum.

Normální (Gaussovo) rozdělení



Funkce *f*(*x*)

- symetrická vůči poloze maxima $x = \mu$, které je současně střední hodnotou náhodné proměnné,
- s rostoucí směrodatnou odchylkou σ se křivka rozšiřuje a klesá její funkční hodnota v maximu, protože plocha pod křivkou musí zůstat jednotková → roste rozptyl hodnot.

(Meloun & Militký, 2013)

Meloun, M., Militký, J. (2013). *Kompendium statistického zpracování dat*. Praha: Karolinum.

Normální (Gaussovo) rozdělení - výpočet

Hodnoty hustoty pravděpodobnosti i distribuční funkce lze spočítat pomocí funkce

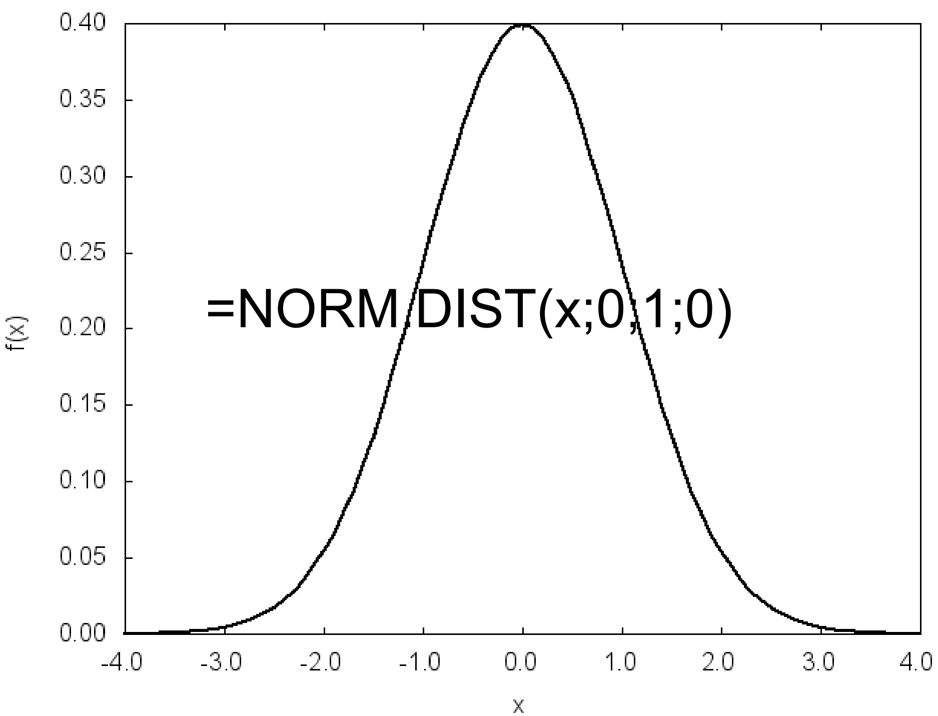
=NORM.DIST(x;střed_hod;sm_odch;S)

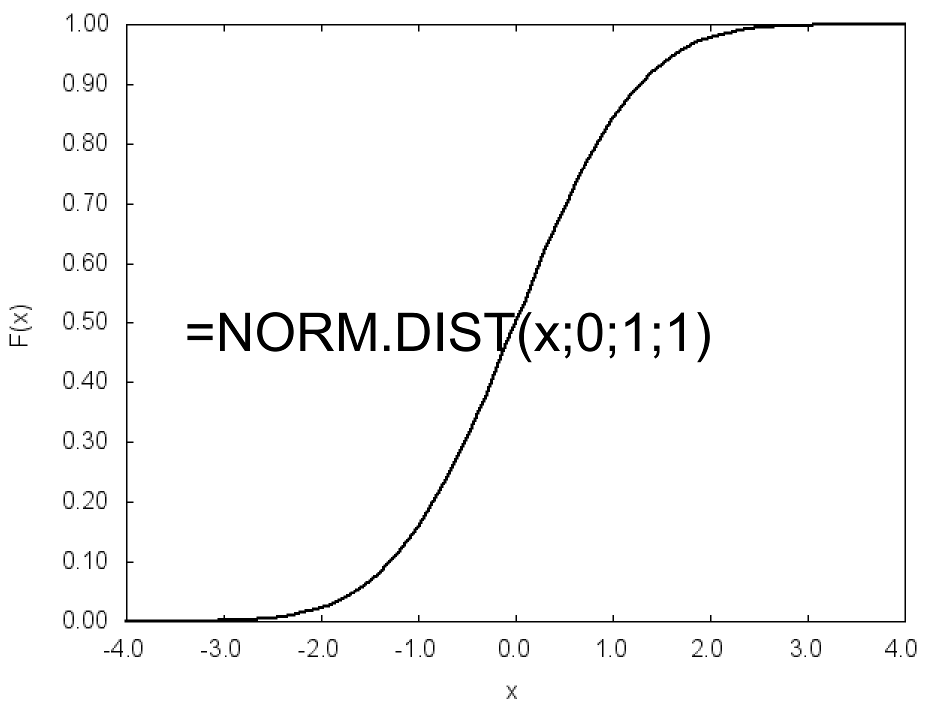
x - hodnota, pro kterou zjišťujeme hodnotu rozdělení.

střed_hod - střední hodnota.

sm_odch - směrodatná odchylka rozdělení.

S - je-li NEPRAVDA, vrací hustotu pravd., je-li PRAVDA, vrací distribuční funkci.





Normální (Gaussovo) rozdělení - výpočet

Příklad:

Inteligenční kvocient (IQ), je standardizované skóre používané jako výstup standardizovaných inteligenčních psychologických testů k vyčíslení inteligence člověka v poměru k ostatní populaci. Nejčastěji se používá deviační skóre s **průměrem 100** a **směrodatnou odchylkou 15**.

(https://cs.wikipedia.org/wiki/Inteligen%C4%8Dn%C3%AD_kvocient)

Debilita odpovídá IQ 50-69.

(https://cs.wikipedia.org/wiki/Ment%C3%A1ln%C3%AD_retardace)

Odhadněte, kolik je v ČR debilů.

Řešení:

=NORM.DIST(69;100;15;1) vrací 0,0194.

=NORM.DIST(50;100;15;1) vrací 0,0004.

Odhad parametrů na základě náhodného výběru

Výsledkem měření veličiny není hustota pravděpodobnosti získaná z nekonečného počtu měření, ale **konečný soubor naměřených hodnot** – tzv. **výběr** z nekonečného počtu všech možných hodnot.

- hledané parametry nikdy neurčíme neomezeně přesně
- znalost chování náhodných proměnných umožňují říci, s jakou pravděpodobností se v oblasti, kterou jsme vymezili naším odhadem, skutečná hodnota nachází

(Meloun & Militký, 2013)

Protože jsou konkrétní naměřené hodnoty zpravidla ovlivňovány **velkým množstvím různých nezávislých vlivů**, odpovídá rozdělení měřených veličin nejčastěji **normálnímu rozdělení**.

Meloun, M., Militký, J. (2013). *Kompendium statistického zpracování dat*. Praha: Karolinum.

Odhad parametrů náhodného výběru - značení

Mějme soubor N naměřených hodnot

$x_1, x_2, \ldots, x_N$

náhodné veličiny s **normálním rozdělením** s parametry μ a σ.

Z naměřených hodnot chceme **odhadnout** jeho hodnoty parametrů μ a σ.

Hodnoty odhadů budeme značit $\hat{\mu}$ a $\hat{\sigma}$, abychom je odlišili od neznámých skutečných hodnot.

Aritmetický průměr

Lze dokázat, že nejlepším **odhadem** střední hodnoty normálního rozdělení, a tedy i skutečné hodnoty měřené veličiny, je **aritmetický průměr** měřených hodnot (Neubauer et al., 2012)

$$\boxed{\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

Vztah plyne z podmínky, aby součet chyb byl nulový:

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{\mu}) = 0$$

Neubauer, J., Sedlačík, M., Kříž, O. (2012). *Základy statistiky Aplikace v technických a ekonomických oborech*. Praha: GRADA.

Směrodatná odchylka jednoho měření

Nejlepším **odhadem** **výběrové směrodatné odchylky jednoho měření** je

(Neubauer et al., 2012)

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \hat{\mu})^2}$$

=SMODCH.VÝBĚR.S()

Neubauer, J., Sedlačík, M., Kříž, O. (2012). *Základy statistiky Aplikace v technických a ekonomických oborech*. Praha: GRADA.

Směrodatná odchylka aritmetického průměru

$$\widehat{\sigma_{\hat{\mu}}} = \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \widehat{\mu})^2}$$

Chceme vědět, jak dobrý je odhad $\hat{\mu}$, tedy s jakou pravděpodobností *p* leží skutečná střední hodnota μ v intervalu

(Neubauer et al., 2012)

$$\left\langle \hat{\mu} - k\,\widehat{\sigma_{\hat{\mu}}},\ \hat{\mu} + k\,\widehat{\sigma_{\hat{\mu}}} \right\rangle$$

Neubauer, J., Sedlačík, M., Kříž, O. (2012). *Základy statistiky Aplikace v technických a ekonomických oborech*. Praha: GRADA.

Studentovy koeficienty

S jakou pravděpodobností *p* leží skutečná střední hodnota μ v intervalu

$$\left\langle \hat{\mu} - k\,\widehat{\sigma_{\hat{\mu}}},\ \hat{\mu} + k\,\widehat{\sigma_{\hat{\mu}}} \right\rangle$$

Tabulka Studentových koeficientů *k*

	hladina spolehlivosti 1-α			
N	**50,00 %**	**68,27 %**	**95,45 %**	**99,73%**
3	0,817	1,321	4,526	19,210
4	0,765	1,197	3,307	9,219
5	0,741	1,141	2,869	6,620
10	0,703	1,059	2,320	4,094
20	0,688	1,027	2,141	3,447
100	0,677	1,005	2,025	3,077
∞	0,675	1,000	2,000	3,000

Studentovy koeficienty lze také spočítat pomocí funkce =T.INV.2T(α;*N*-1).

Odlehlé hodnoty

Ve zpracovávaných datech se mohou objevit **odlehlé hodnoty**, tedy hodnoty nepatřící mezi ostatní.

Takové hodnoty mohou být důsledkem

- hrubých chyb při měření,
- chyb při přepisování dat,
- prvku, který do sledovaného základního souboru nepatří,
- ...

Takové odlehlé hodnoty je třeba identifikovat a následně **vyloučit ze souboru**, protože by negativně ovlivnily výsledky statistického zpracování.

(Neubauer et al., 2012)

Neubauer, J., Sedlačík, M., Kříž, O. (2012). *Základy statistiky Aplikace v technických a ekonomických oborech*. Praha: GRADA.

Testování statistických hypotéz – stručný úvod

1. **Formulujeme tzv. nulovou hypotézu** (předpokládáme, že pozorovaný jev je pouze náhodný).
2. **Zvolíme hladinu významnosti testu α**, tj. riziko (že zamítneme hypotézu, která je ve skutečnosti správná), s nímž jsme ochotni se smířit.
3. **Spočítáme** příslušné **testovací kritérium** a porovnáme ho s příslušnou kritickou hodnotou.
4. **Nulovou hypotézu** buď **nezamítneme** (testovací kritérium je menší než kritická hodnota) nebo **zamítneme** (testovací kritérium je větší než kritická hodnota).

(Meloun & Militký, 2013)

Meloun, M., Militký, J. (2013). *Kompendium statistického zpracování dat*. Praha: Karolinum.

Testování statistických hypotéz – chyby

Vždy existuje riziko, že naše tvrzení nebude v souladu se skutečností, tedy že buď

- zamítneme hypotézu, která ve skutečnosti platí – takovou chybu označme α (tzv. **chyba 1. druhu**),

nebo

- nezamítneme hypotézu, která ve skutečnosti neplatí – takovou chybu označme β (tzv. **chyba 2. druhu**).

Zmenšení α vede za jinak nezměněných podmínek ke zvětšení β a naopak.

Hodnotu α volíme nejčastěji **0,05**; **0,01**; **0,005**; **0,001**.

Když hypotézu zamítneme, znamená to, že téměř jistě (s pravděpodobností $1 - \alpha$) neplatí.

(Meloun & Militký, 2013)

Meloun, M., Militký, J. (2013). *Kompendium statistického zpracování dat*. Praha: Karolinum.

Testování statistických hypotéz

		Výsledek testu	
		nezamítáme H_0	zamítáme H_0
Skutečnost	platí H_0	správné rozhodnutí pravděpodobnost **1 - α** **spolehlivost testu**	chyba I. druhu pravděpodobnost α **hladina významnosti**
	neplatí H_0	chyba II. druhu pravděpodobnost β **hladina významnosti**	správné rozhodnutí pravděpodobnost **1 - β** **síla testu**

(Meloun & Militký, 2013)

Meloun, M., Militký, J. (2013). *Kompendium statistického zpracování dat*. Praha: Karolinum.

Testování statistických hypotéz -příklad

Chceme testovat podle výšky, zda neznámá osoba je muž.

Předpokládejme, že

- **muži** mají $\mu=180$ cm, $\sigma=5$ cm;
- **ženy** mají $\mu=170$ cm, $\sigma=5$ cm.

Nulová hypotéza: Osoba je žena.

Jakou výšku musíme požadovat na hladině významnosti 0.05

(5 % riziko, že řekneme, že je to muž a bude to žena)?

Jakou výšku musíme požadovat na hladině významnosti 0.01?

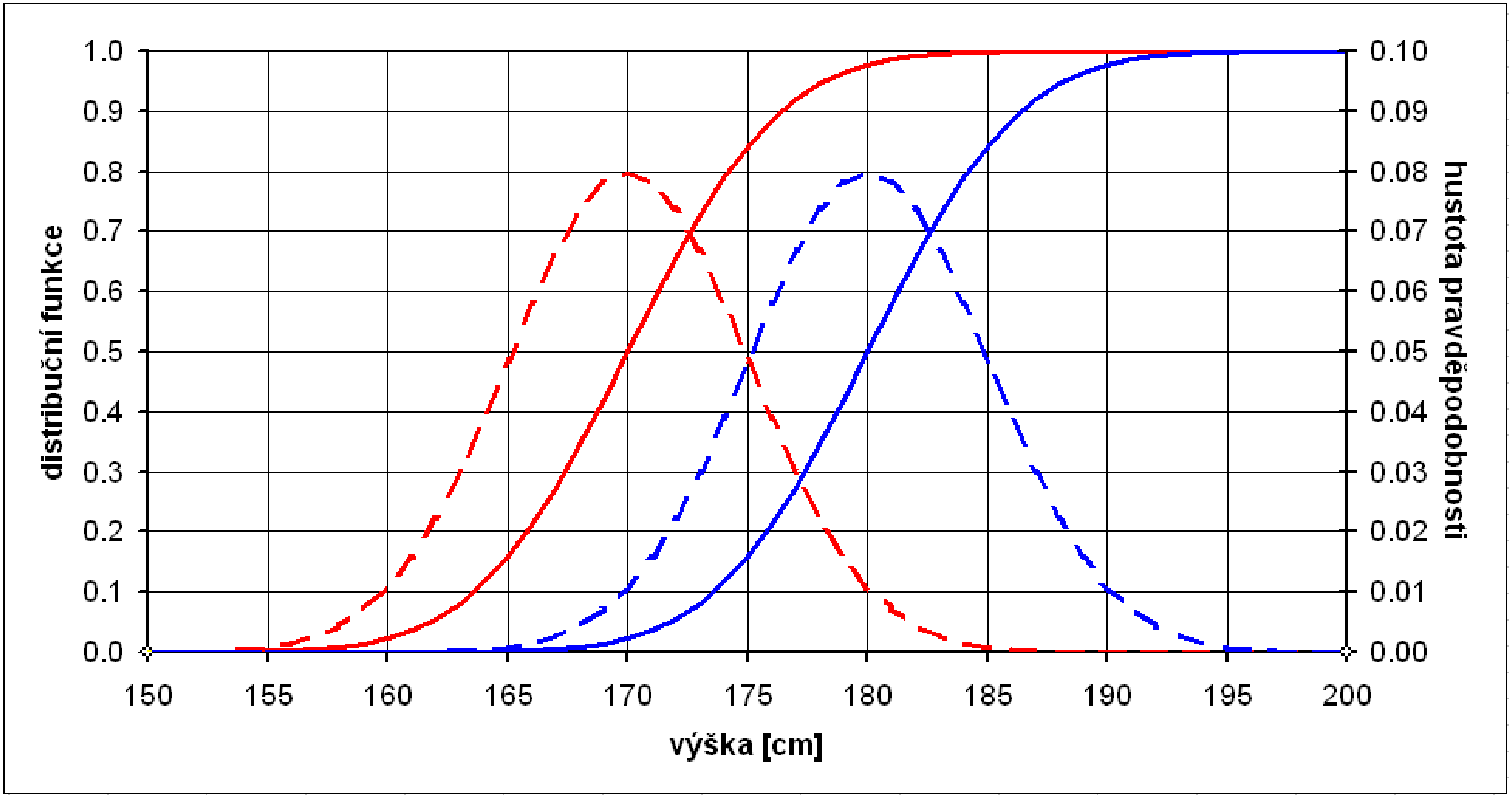
Jaká je pravděpodobnost chyby 2. druhu?

Jaká je síla testu?

Příklad

muži modře x ženy červeně

distribuční funkce plnou čarou x **hustota pravděpodobnosti** čárkovaně



Grubbsův test odlehlých hodnot

Jako míra odlehlosti hodnoty slouží její vzdálenost od aritmetického průměru výběru dat s **normálním rozdělením**, vztažená k výběrové směrodatné odchylce.

Testovací statistika má tvar

(Meloun & Militký, 2013)

$$T = \frac{|x_{ext} - \hat{\mu}|}{\sigma}$$

Je-li T větší než kritická hodnota $T_{N,\alpha}$, vyloučíme testovanou hodnotu ze souboru.

Poznámky:

1. Testujeme jednu hodnotu, která je nejvzdálenější od průměru X_{ext}.
2. V literatuře existují i varianty testující současně minimální i maximální hodnotu, případně používající nevýběrovou směrodatnou odchylku. Tyto varianty používají jiné kritické hodnoty.

Kritické hodnoty Grubbsova T-rozdělení (α = 0,05 a 0,01)

N	3	4	5	7	10	15	20	30	50	70	100	200
$T_{N,0,05}$	0,94	1,28	1,53	1,87	2,17	2,46	2,64	2,86	3,10	3,23	3,37	3,60
$T_{N,0,01}$	0,94	1,30	1,58	1,98	2,35	2,71	2,92	3,18	3,45	3,60	3,74	3,97

Meloun, M., Militký, J. (2013). *Kompendium statistického zpracování dat*. Praha: Karolinum.

Test střední hodnoty normálního rozdělení

Na začátku předpokládáme, že střední hodnota souboru s normálním rozdělením, ze kterého byl proveden výběr, je μ_0.

Testovací kritérium:

$$t = \frac{|\hat{\mu} - \mu_0|}{\widehat{\sigma}_{\hat{\mu}}}$$

kde $\hat{\mu}$ a $\widehat{\sigma}_{\hat{\mu}}$ jsou výběrová střední hodnota a její výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru.

Kritickou hodnotou $t_{1-\alpha}(N\text{-}1)$ jsou kvantily Studentova rozdělení s *N*-1 stupni volnosti pro zvolenou hladinu významnosti α, které najdeme ve statistických tabulkách nebo vypočítáme pomocí funkce =T.INV.T2(α,*N*-1).

(Lepš & Šmilauer, 2016)

Lepš, J., Šmilauer, P. (2016). *Biostatistika*. České Budějovice: EPISTEME.

Test střední hodnoty normálního rozdělení

Hodnoty:
5.34; 4.03; 5.94; 3.24; 5.21;
5.07; 4.31; 7.47; 6.81; 4.59.

$\mu = 5{,}20$

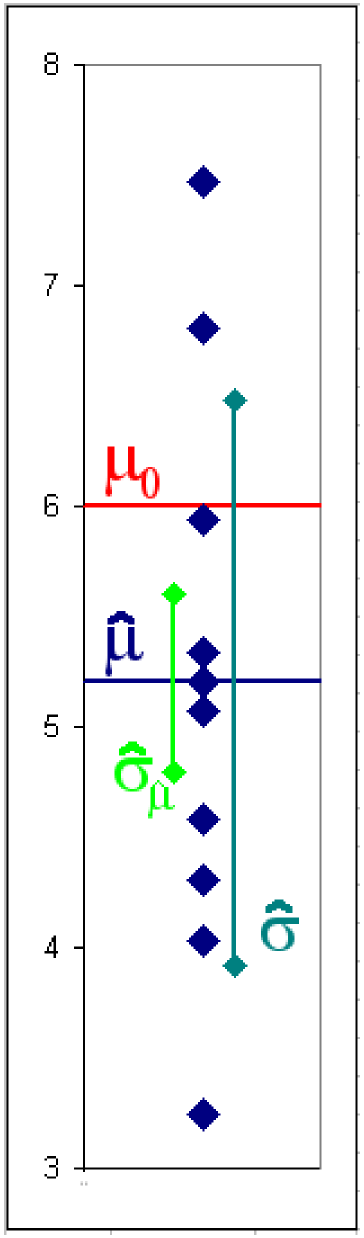
$\sigma = 1{,}28$

$\sigma_{\mu} = 0{,}40$

$\mu_0 = 6{,}00$

$$t = \frac{|\hat{\mu} - \mu_0|}{\widehat{\sigma_{\hat{\mu}}}}$$

$t = 2{,}00$
$t_{krit}(\alpha = 0{,}05) = 2{,}26.$



Test rovnosti dvou středních hodnot norm. rozd.

Na začátku předpokládáme, že střední hodnoty dvou souborů s normálním rozdělením, ze kterých byl proveden výběr, se rovnají.

.

Testovací kritérium:

$$t = \frac{|\widehat{\mu}_1 - \widehat{\mu}_2|}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_1^2}{N_1} + \frac{\widehat{\sigma}_2^2}{N_2}}}$$

kde $\widehat{\mu}_1 \text{ a } \widehat{\sigma}_1$ resp. $\widehat{\mu}_2 \text{ a } \widehat{\sigma}_2$ jsou výběrová střední hodnota a výběrová směrodatná odchylka 1. souboru resp. 2. souboru.

Kritickou hodnotou $t_{1-\alpha}(N_1+N_2-2)$ jsou kvantily Studentova rozdělení s N_1+N_2-2 stupni volnosti pro zvolenou hladinu významnosti α, které najdeme ve statistických tabulkách nebo vypočítáme pomocí funkce =T.INV.2T(α, N_1+N_2-2).

(Lepš & Šmilauer, 2016)

Lepš, J., Šmilauer, P. (2016). *Biostatistika*. České Budějovice: EPISTEME.

Test rovnosti dvou středních hodnot norm. rozd.

Hodnoty:

1\. sada: 7.42; 5.43; 5.88; 6.53; 7.71; 5.72; 5.77; 4.89; 5.65; 5.92.

2\. sada: 4.79; 4.87; 5.60; 4.58; 6.59; 4.55; 3.71; 3.85; 3.46; 5.36.

$\mu_1 = 6{,}09$ $\mu_2 = 4{,}74$

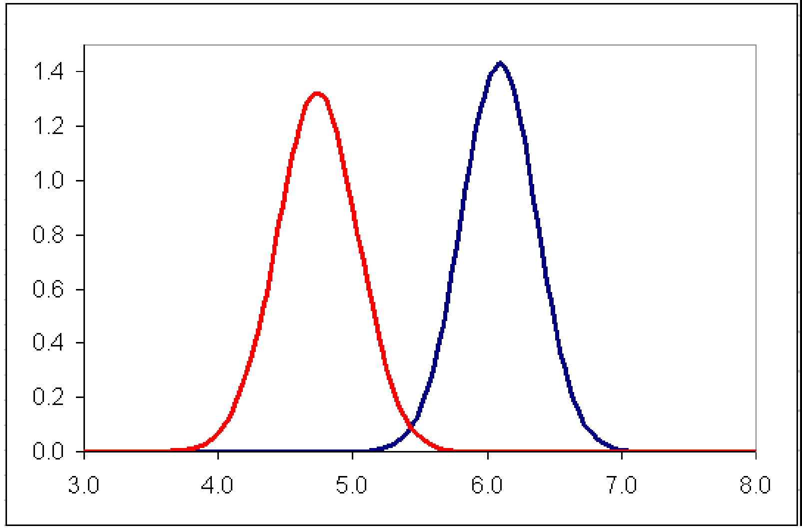
$\sigma_1 = 0{,}88$ $\sigma_2 = 0{,}95$

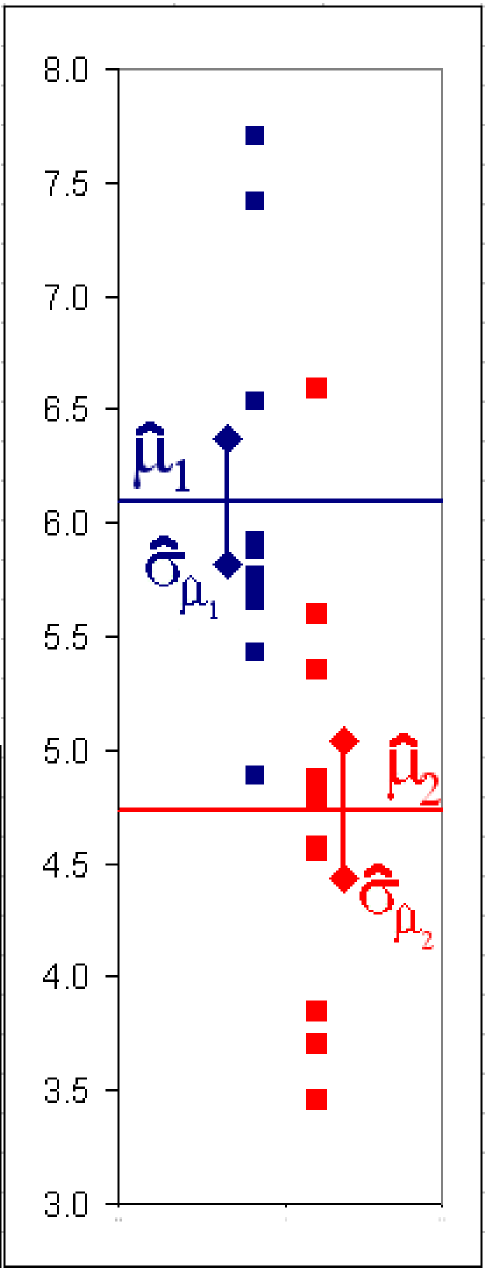
$\sigma_{\mu 1} = 0{,}28$ $\sigma_{\mu 2} = 0{,}30$

$$t = \frac{|\widehat{\mu_1} - \widehat{\mu_2}|}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_1}^2}{N_1} + \frac{\widehat{\sigma_2}^2}{N_2}}}$$

$t = 3{,}31$

$t_{krit}(\alpha=0{,}01) = 2{,}88.$





Test rozdílu dvou středních hodnot - párový

Předpokládejme, že testujeme účinky preparátu na zlepšení paměti. Pokusné osoby nejdříve absolvovaly test paměti, poté dostaly preparát a absolvovaly test paměti ještě jednou.

Pro testování bychom mohli použít test rozdílu dvou středních hodnot z minulé kapitoly. Lze však očekávat, že výsledky testu budou mít velkou variabilitu, která může překrýt případné malé zlepšení.

Nabízí se proto možnost **spočítat pro každou osobu rozdíl obou testů paměti** a **testovat, zda je střední rozdíl mezi testy nulový nebo různý od nuly**.

(Lepš & Šmilauer, 2016)

Lepš, J., Šmilauer, P. (2016). *Biostatistika*. České Budějovice: EPISTEME.

Pravděpodobnostní přístup

Při testování hypotéz jsme počítali testovací kritérium a srovnávali ho s kritickou hodnotou na nějaké hladině významnosti.
Používá se i **opačný přístup** - **z testovacího kritéria spočítat pravděpodobnost s jakou platí nulová hypotéza.**

Příklad:
Předpokládejme, že při testu střední hodnoty (10 stupňů volnosti) jsme vypočítali testovací kritérium T = 2,97 a pomocí funkce T.INV.2T() kritické hodnoty na hladinách významnosti 0,05 a 0,01 $t_{krit}(0,05) = 2,23$ a $t_{krit}(0,01) = 3,17$.

H_0 zamítáme na hladině 0,05 a nezamítáme na 0,01.

Alternativní přístup:

Pomocí funkce T.DIST.2T(2,97;10) spočítáme pravděpodobnost p = 0,014, že nulová hypotéza platí.

(Lepš & Šmilauer, 2016)

Lepš, J., Šmilauer, P. (2016). *Biostatistika*. České Budějovice: EPISTEME.

Postup při zpracování dat

1. Z naměřených hodnot vypočteme odhad střední hodnoty a odhad směrodatné odchylky jednoho měření.
2. Ze souboru naměřených hodnot vyloučíme odlehlé hodnoty.
3. Předchozí dva kroky opakujeme tak dlouho, až v souboru měření nejsou odlehlé hodnoty.
4. Pro naměřené hodnoty *N*, které zůstaly, vypočteme směrodatnou odchylku aritmetického průměru a určíme hodnotu Studentova koeficientu *k* pro požadovanou hladinu spolehlivosti. Chyba měření na dané hladině spolehlivosti je rovna součinu $k\,\widehat{\sigma}_{\hat{\mu}}$.
5. Celkovou chybu měření zapíšeme na jedno nebo dvě platná místa a střední hodnotu na stejný počet desetinných míst jako chybu.
6. U výsledku uvedeme odpovídající jednotku.

Příklad

Ve vepříně bylo náhodně vybráno 8 prasátek o hmotnostech:
94,4; 90,3; 96,8; 89,4; 82,1; 98,1; 94,5 a 96,0 kg.
Určete průměrnou hmotnost prasátka z tohoto chovu.

Aritmetický průměr: 92,7 kg
Výběrová směrodatná odchylka: 5,24 kg

Vyloučení odlehlých hodnot: nejvzdálenější od průměru je **82,1 kg**
Grubbsův test: T = (92,7 - **82,1**)/5,24 = 2,02
Kritická hodnota (interpolací) T_{krit}(0,05;8) = 1,97 - vyloučíme.
Nový průměr: 94,2
Nová výběrová směrodatná odchylka: 3,26
Nová odlehlá hodnota: **89,4 kg**
Grubbsův test: T = (94,2 - **89,4**)/3,26 = 1,47
Kritická hodnota T_{krit}(0,05;7) = 1,87 - nevyloučíme.

Asi by bylo dobré ověřit, jestli prasátko o hmotnosti 82,1 kg nebylo nemocné. Jeho hmotnost se výrazně liší od ostatních.

Příklad - pokračování

aritmetický průměr: 94,2 kg
výběrová směrodatná odchylka: 3,26

směrodatná odchylka průměru: $\widehat{\sigma_{\hat{\mu}}} = \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{(N)}} = \frac{3{,}26}{\sqrt{7}} = 1{,}23$

Studentův koeficient pro 6 stupňů volnosti a hladinu spolehlivosti 68,27 %: 1,091

Šířka intervalu na hladině spolehlivosti: 1,23*1,091 = 1,34
Průměrná hmotnost prasátka z tohoto chovu je

m = (94,2 ± 1,4) kg